FRANCZIA TAMÁS

A KVANTUMMECHANIKAI IMPULZUS ELTOLÁSI SZIMMETRIÁVAL TÖRTÉNŐ BEVEZETÉSÉRŐL IV.

(A klasszikus- és a kvantummechanika egymáshoz való viszonya)

ABSTRACT: *The purpose of this study consisting of several parts is to define the quantum-mechanical momentum with a moving symmetry in teaching quantum-mechanics at universities. In consequence of some methodological points of view and for the sake of less size of the article the discussion supposes that students have got acquainted with the principles of quantum mechanics can be found in George Marx's book on quantum-mechanics. In this part of the study we introduce the wave-function of quasi-classical form.*

A cikksorozat célja az, hogy bemutasson egy módszert a kvantummechanikai impulzus eltolási szimmetriával történő bevezetésére az egyetemi oktatás szemináriumai számára. A tárgyalásmód didaktikai és terjedelmi okokból feltételezi, hogy a hallgatók már megismerkedtek a kvantummechanika alapjainak olyan, az egyetemi oktatásban leginkább elterjedt kifejtésével, mely hazánkban Marx György "Kvantummechanika" c. könyve nyomán vált széles körben ismertté. Mivel a fizikai mennyiségek szimmetriákkal történő bevezetése a kvantummechanika egy másik felépítését eredményezi, célszerűnek láttuk, hogy először összefoglaljuk azon definíciókat, axiómákat és tételeket, melyeket ismerni kell ahhoz,

hogy az impulzust logikailag kellően megalapozva vezessük be eltolási szimmetriával. A nem bizonyított tételeknél Marx György már idézett művére utalunk a bizonyítást illetően.
A 14. tételből (a kvantummechanikai időderivált tétele) következett, hogy ha egy kvantummechanikai rendszer Hamilton-operátora független az időtől, akkor várható értékének időbeli deriváltja nulla. A 15. tételből és a XII. axiómából adódott, hogy egy időtől független Hamilton-operátorú rendszer állapotfüggvénye $\psi_k = \varphi_k(\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_n) \exp\left[-\frac{2\pi i}{h} H_k t\right]$ alakú, ahol H_k ill. φ_k a $\hat{H}$ sajátértéke, ill. sajátfüggvénye. $\hat{H}$ várható értéke ebben a normált állapotban maga a H_k sajátérték: a 8. tétel alapján: $\bar{\hat{H}} = (\psi_k, \hat{H}\ \psi_k) = (\psi_k, H_k\psi_k) = H_k(\psi_k, \psi_k) = H_k$, amely független az időtől. A 7. tétel a VIII. axióma és együttes következményük alapján kapjuk, hogy $\hat{H}\psi_k = H_k\psi_k$ esetén H_k mérési valószinűsége 1, ha a rendszeren $\hat{H}$ aktuális sajátértékének mérését hajtjuk végre.

Egy klasszikus mechanikai tömegpontrendszer mozgását leirhatjuk a konfigurációs térben a Lagrange-féle másodfaju mozgásegyenletek segítségével, illetve a fázistérben a kanonikus egyenletek vagy a Hamilton-Jacobi-féle parciális differenciálegyenlet felhasználásával. Az utóbbi az S hatásfüggvény meghatározásán át szolgáltatja a mozgás leirását. A Lagrange-, illetve a Hamilton-függvény akármelyikének explicit időfüggetlenségéből levezethető, vagy triviálisan adódik a rendszer mechanikai energiájának megmaradása.

A kvantummechanikai rendszerek mozgását az időtől függő Schrödinger-egyenlet irja le a nemrelativisztikus spintől független kvantummechanikában, mely a rendszer Hamilton-operátorából kiindulva irható fel. (Vö. azzal a ténnyel, hogy az előbbiekben említett klasszikus mechanikai mozgásegyenletek rendre a Lagrange-, ill. a Hamilton-függvény ismeretében irhatók fel.) A Hamilton-operátornak az időtől való explicit függetlensége szintén azt eredményezi, hogy a rendszer adott stacionárius állapotától függő értékű mozgásállandó, egy H_k sajátérték rendelhető hozzá a rendszerhez.

14. Definíció: Az eddigiek alapján a Hamilton-operátor sajátértékeit a klasszikus mechanikai rendszerek energiájával analóg mennyiségnek tekinthetjük, ezért $\hat{H}$ -t a kvantummechanikai energia operátorának nevezzük. A két mennyiség közötti analógiára utalnak a továbbiakban kifejtett gondolatok is.

Ismeretes, hogy már egy a nemrelativisztikus és a spint nem tartalmazó kvantummechanika törvényeivel leirható szabad részecske elhajlás és azt követő interferencia-jelenséget mutat miután elegendően kicsi résen halad keresztül. Ezek a jelenségek értelmezhetők ugy, hogy a szabad részecskét meghatározott hullámhosszal rendelkező hullámnak tekintjük, melynek hullámhosszát a felfogó ernyőn létrehozott képből ugy kell meghatározni, hogy az ismert szélességű résen egymás után bocsátunk át azonos körülmények között kilőtt és igy azonos kvantumállapotú szabad részecskéket olyan időközönként, hogy azok egymással ne léphessenek kölcsönhatásba, és a felfogóernyőn létrejövő interferenciaképből a klasszikus optikában megismert összefüggések segítségével számitjuk a hullámhosszt. Az elhajlás matematikai tárgyalásakor abból a későbbiekben igazolt tényből indulunk ki, hogy a szabad részecske ψ -je síkhullám alakú, mely síkhullám hullámhosszát tekintjük a részecske hullámhosszának. Az elhajlás a ψ által reprezentált síkhullám résen való elhajlásával modellezhető matematikailag. Az elhajlást követő interferencia által eredményezett, a felfogóernyőn lévő képet a d szélességű rés különböző pontjaiból kiinduló "elemi ψ_i° gömbhullámok" szuperpoziciójából kaphatjuk meg, mely az útkülönbségektől függően eredményez relativ maximumokat és minimumokat. (Az elektron elhajlás utáni állapotfüggvénye a rés pontjaiból kiinduló elemi gömbhullámok interferenciájaként adódik.)

A résen való elhajlás a klasszikus mechanika alapján nem értelmezhető. A klasszikus mechanika és elektrodinamika alapján is leirható viszont egy elektronnak a hely függvényeként elegendően lassan változó erőtérben való mozgása. Ezt mutatja a tapasztalat (pl.: a katódsugárcsőben való mozgás).

Tetszőlegesen változó elektromágneses erőterekben a részecske mozgása a kvantummechanikai szórásszámítással irható le, mellyel az erőtéren való szóródás előtti állapotfüggvény és az erőteret leiró potenciál ismeretében a szóródás utáni állapotfüggvényt határozzák meg. ([1] 138-149.o.)

Ha a részecske mozgásának leirására a klasszikus mechanika is alkalmazható, akkor a klasszikus és a kvantummechanikai leirás közötti kapcsolat abban áll, hogy az utóbbiból a mozgás klasszikus trajektóriái meghatározhatók. A klasszikus leirás speciális esetben való alkalmazhatósága és a kvantummechanikai tárgyalás általános érvényessége arra mutat, hogy a klasszikus mechanika legalább határesetként benne van a kvantummechanikában. A dolgozat további részében ennek feltételeit vizsgáljuk.

A tapasztalat szerint a résnek elegendően kicsinek kell lennie ahhoz, hogy a részecske elhajlást szenvedjen a rajta való áthaladáskor. Pontosabban a rés szélességének összemérhetőnek kell lennie a már emlitett interferenciaképből számitott hullámhosszal. Tetszőlegesen kicsi réshez elvben található olyan határ hullámhosszuság, melynél kisebb hullámhosszuságu részecske már gyakorlatilag nem szenved elhajlást az adott résen. Igy a kvantummechanika szemszögéből nézve akkor közelitjük meg egyre jobban a klasszikus mechanikát, mely szerint nem lép fel a résen való elhajlás, ha a részecske hullámhosszával nullához tartunk, s igy gyakorlatilag egyre szűkitjük azon résszélességek halmazát, melyhez tartozó réseken a részecske elhajlást szenved. (Vö. ezt azzal a ténnyel, hogy a sugárzás részecskejellege is a nulla hullámhossz felé közelítve erősödik fel.)

A 15. tétel és a XII. axióma alapján egy az időt explicite nem tartalmazó Hamilton-operátorral bíró részecske állapotfüggvénye, s igy a szabad (erőmentes térben mozgó) részecske állapotfüggvenye is $\varphi(\bar{r}) \exp\left[-\frac{2\pi i}{h}Ht\right]$ alakú. A szabad részecskére érvényes időtől függő Schrödinger-egyenlet:

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right]=\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial\psi}{\partial t},$$

melynek a fenti alakú és a változók szorzatalakú szeparációjával kapható megoldása a következő:

$$\psi = A\exp\left[i\left(k_x x+k_y y+k_z z-2\pi h^{-1}Ht\right]\right., \text{ ahonnan}$$

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta\psi=\frac{h^2\bar{k}^2}{8\pi^2 m}A\exp\left[i\left(k_x x+k_y y+k_z z-2\pi h^{-1}Ht\right]\right.\equiv H'\psi$$

mely utolsó egyenlőségből $k_x^2+k_y^2+k_z^2=8\pi^2 mh^{-2}H'$. $\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial\psi}{\partial t}$ jelen esetben $H\psi$ -vel egyenlő.

$$\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta\psi=H'\psi \quad \text{miatt } H'=H.$$

Az állapotfüggvényre kapott kifejezés $\psi = A\exp\left[i\left(\bar{k}\bar{r}-2\pi h^{-1}Ht\right]\right.$ alakba írható, melyről látszik, hogy egy a $\bar{k}$ vektor irányába haladó $\lambda = 2\pi|\bar{k}|^{-1} = 2h(8mH)^{-\frac{1}{2}}$ hullámhosszúságú síkhullámot ir le. Utolsó egyenletünket figyelembe véve a $\lambda\longrightarrow 0$ határeset ugy adódik a kvantummechanikából, ha $h\longrightarrow 0$. (Vö. azzal a már megtett megjegyzésünkkel, hogy a szabad részecske ψ-jének térbeli hullámhossza (periódusa) egyenlő a szabad részecske hullámhosszával.)

Vajon milyen egyenletbe megy át egy az időtől explicite független Hamilton-operátorú kvantummechanikai rendszer időtől függő Schrödinger-egyenlete a $h\longrightarrow 0$ határesetben? Csak a látszat mutatja, hogy $ih(2\pi)^{-1}\partial_t\psi$ a nullához tart $h\longrightarrow 0$ esetén. ψ

legáltalánosabb alakja az időtől explicite független Hamilton-operátorú rendszer esetében a 15. tétel alapján:

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{f_k} c_{kl}\ \varphi_{kl}(\bar{r}_1,\dots,\bar{r}_n)\exp\left(-\frac{2\pi i}{h} H_k t\right) +$$

$$+ \int_{H_\alpha}^{H_\beta} \sum_{l=1}^{f_H} c_{Hl}\ \varphi_H(\bar{r}_1,\dots,\bar{r}_n)\ \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} Ht\right)dH.$$ Tehát

$$\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{f_k} H_k\ c_{kl}\ \varphi_{kl}(\bar{r}_1,\dots,\bar{r}_n)\exp\left(-\frac{2\pi i}{h} H_k t\right)+$$

$$+ \int_{H_\alpha}^{H_\beta} \sum_{l=1}^{f_H} H\ c_{Hl}\ \varphi_H(\bar{r}_1,\dots,\bar{r}_n)\ \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} Ht\right)dH,$$

ami nyilván nem tart nullához, ha $h \longrightarrow 0$. A térbeli parciális deriváltakat tartalmazó rész sem tart nullához $h \longrightarrow 0$ esetén, mert ψ fenti alakjával az időtől függő Schrödinger-egyenlet ezen része

$$-h^2(8\pi^2)^{-1} \sum_{i=1}^{n} m_i^{-1} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{f_k} c_{kl}\ \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} H_k t\right)\ \Delta_i \varphi_{kl} + \right.$$

$$\left. + \int_{H_\alpha}^{H_\beta} \sum_{l=1}^{f_H} c_{Hl}\ \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} Ht\right)\ \Delta_i \varphi_{Hl}\, dH\right],$$ alakú, melybe a

$$\varphi_{kl} = \int_{\infty} \Phi_{kl}\ (\bar{k}_1,\dots,\bar{k}_n)\ \exp\left[i \sum_{j=1}^{M} \bar{k}_j \bar{r}_j\right] d^3\bar{k}_1,\dots,d^3\bar{k}_n$$

$$\varphi_{Hl} = \int_{\infty} \Phi_{Hl}\ (\bar{k}_1,\dots,\bar{k}_n)\ \exp\left[i \sum_{j=1}^{M} \bar{k}_j \bar{r}_j\right] d^3\bar{k}_1,\dots,d^3\bar{k}_n$$

Fourier-féle integrálelőállításokat behelyettesítve a Schrödinger--egyenlet vizsgált tagjára a következő kifejezés adódik:

$$h^2(8\pi^2)^{-1} \sum_{i=1}^{n} m_i^{-1} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{f_k} c_{kl}\ \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} H_k t\right)\cdot\right.$$

$$\cdot \int_{\infty} \Phi_{kl}\ (\bar{k}_1,\dots,\bar{k}_n)\cdot |\bar{k}_i|^2 \cdot \exp\left[i \sum_{j=1}^{M} \bar{k}_j \bar{r}_j\right] d^3\bar{k}_1,\dots,d^3\bar{k}_n +$$

$$+ \sum_{l=1}^{f_H} \int_{H_\alpha}^{H_\beta} c_{Hl}\ \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} Ht\right)\cdot \left(\int_{\infty} \Phi_{kl}(\bar{k}_1,\dots,\bar{k}_n)\cdot\right.$$

$$\cdot |\bar{k}_i|^2 \cdot \exp\left[i \cdot \sum_{j=1}^{M} \bar{k}_j \bar{r}_j\right] d^3\bar{k}_1, \ldots, d^3\bar{k}_n \Bigg] dH \,.$$

Mivel a φ_{kl} és φ_{Hl} függvények Fourier-féle integrálelőállításaiban szereplő $\bar{k}_j$ vektorokra fennáll hogy

$$k_{xj}^2 + k_{yj}^2 + k_{zj}^2 = 8\pi^2 m_j \, h^{-2} H_j$$

ugyanolyan módon, mint a

$$\psi\,(\bar{r},\bar{k}) = \varphi\,(\bar{r},\bar{k}) \exp\left[-\frac{2\pi i}{h} H_k t\right] \text{-beli } \varphi\,(\bar{r},\bar{k}) = A(\bar{k}) \exp(i\bar{k}\,\bar{r})$$

alakú φ függvények esetében, ahol már bizonyítottuk $\bar{k}$-ra a megfelelő egyenleteket, a $|\bar{k}_i|^2$ kifejezések helyébe $\frac{8\pi^2 m_i}{h^2} H_i$ helyettesíthető. Ezek mindegyikéből kiemelhető $8\pi^2 h^{-2}$ a Schrödinger-egyenletben lévő most vizsgált tag i-szerinti összegzési művelete elé. Az ezen szummajel előtt szereplő $h^2(8\pi^2)^{-1}$ tényezővel szorozva a kiemelt tényezőt 1-et kapunk, tehát $h \longrightarrow 0$ esetén a térbeli parciális deriváltakat tartalmazó tag sem tart nullához. A levezetésben felhasználtuk, hogy a φ_{kl} függvények négyzetesen integrálhatók, a φ_{Hl} függvényekről pedig, melyek nem négyzetesen integrálhatók, feltettük, hogy legalább Lebesgue-féle értelemben integrálhatóak a teljes konfigurációs térben. E feltételek mellett ugyanis léteznek az említett függvények Fourier-féle integrálelőállításai.

A kérdés tehát az, hogy $h \longrightarrow 0$ esetén milyen alakú egyenletbe megy át egy kvantummechanikai rendszer időtől függő Schrödinger--egyenlete. Megállapitottuk már, hogy a klasszikus mechanikának határesetben benne kell foglaltatnia a kvantummechanikában. Az időtől függő Schrödinger-egyenletnek tehát, olyan skaláris klasszikus mechanikai egyenletbe kell átmennie, mely leirja egy klasszikus mechanikai pontrendszer mozgását. Mivel egyetlen skaláris egyenletként a Hamilton-Jacobi-féle parciális differenciálegyenlet tudja csak leirni a klasszikus mechanikai pontrendszerek mozgását (hiszen minden más lehetőség egyenletrendszerre vezet!), egy kvantummechanikai rendszer időtől függő Schrödinger-egyenletének a Hamilton–Jacobi-féle parciális differenciálegyenletbe kell átmennie $h \longrightarrow 0$ esetén. Az átmenetnek a változók tipusának szemszögéből nézve nincsen akadálya, hiszen mindkét egyenlet a térkoordinátákat és az időt tartalmazza független változókként.

Tekintsünk egy időtől független Hamilton-operátorú rendszert a $\psi_k = \varphi_k(\bar{r}_1,\dots,\bar{r}_n)\exp\left(-\frac{2\pi i}{h} H_k t\right)$ kvantumállapotban. Ezt behelyettesítve az időtől függő Schrödinger-egyenletbe:

$$\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial\psi_k}{\partial t} = H_k\,\psi_k \quad (1a) \longrightarrow \frac{ih}{2\pi}\frac{1}{\psi_k}\frac{\partial\psi_k}{\partial t} = H_k \qquad (1b)$$

A Hamilton–Jacobi-egyenlet felírható az alábbi alakban:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H(\bar{r}_1,\dots,\bar{r}_n,\bar{p}_1,\dots,\bar{p}_n,t) \qquad (2)$$

ahol S a klasszikus mechanikai rendszer hatásfüggvénye, H a rendszer Hamilton-függvénye, melynek helyettesítési értékei a rendszer lehetséges energiaértékei. Legyen most a klasszikus mechanikai rendszer Hamilton-függvénye az időtől explicite független. Ekkor a rendszer mechanikai energiája időben állandó, és a kvantummechanikai, valamint a klasszikus egyenlet jobboldalán analóg mennyiségek szerepelnek.

$h \longrightarrow 0$ határesetben az (1b) egyenlet átmegy a klasszikus mechanikai (2) egyenletbe:

$$\frac{ih}{2\pi}\frac{1}{\psi_k}\frac{\partial\psi_k}{\partial t} = -\frac{\partial S}{\partial t} \qquad (3)$$

Az idő szerint integrálva kapjuk, hogy:

$$i\,\frac{h}{2\pi}\ln\left[A_k(\bar{r}_1,\dots,\bar{r}_n)\psi_k(\bar{r}_1,\dots,\bar{r}_n)\right] = -S \qquad (4)$$

Rendezve

$$\psi_k = \left[A_k(\bar{r}_1,\dots,\bar{r}_n)\right]^{-1}\exp\left(\frac{2\pi i}{h}S\right) \equiv A_k'(\bar{r}_1,\dots,\bar{r}_n)\exp\left(\frac{2\pi i}{h}S\right) \quad (5)$$

ahol $A_k'(\bar{r}_1,\dots,\bar{r}_n)$- nek 1-re normálható függvénynek kell lennie. Azt kapjuk, hogy $h \longrightarrow 0$ esetén az időtől függő Schrödinger-egyenlet

$A'_k(\bar{r}_1,\ldots,\bar{r}_n)\exp\left[\frac{2\pi i}{h} S\right]$ alakú állapotfüggvénnyel biró rendszer esetén megy át a rendszerhez rendelhető klasszikus mechanikai rendszer Hamilton-Jacobi egyenletébe.

A $\psi_k = A'_k(\bar{r}_1,\ldots,\bar{r}_n)\exp\left[\frac{2\pi i}{h} S\right]$ alak ekvivalens a levezetésünk elején kikötött $\psi_k = \varphi_k(\bar{r}_1,\ldots,\bar{r}_n)\exp\left[-\frac{2\pi i}{h} H_k t\right]$ alakkal, $A'_k=\varphi_k$, és $S=-H_k t$, mely alakú utóbbi egyenlőség a klasszikus mechanikában akkor teljesül, ha a Hamilton-függvény nem függ explicite az időtől.

Feltehető a kérdés, hogy a $\psi = A'(\bar{r}_1,\ldots,\bar{r}_n)\exp\left[\frac{2\pi i}{h} S\right]$ állapotfüggvény alak a legáltalánosabb e ahhoz, hogy $h\longrightarrow 0$ esetén a kvantummechanika átmenjen a klasszikus mechanikába. A kérdés megválaszolása végett helyettesítsük a $\psi = A'(\bar{r}_1,\ldots,\bar{r}_n)\exp\left[\frac{2\pi i}{h} S\right]$ függvényt az időtől függő Schrödinger-egyenletbe. Az $\exp\left[\frac{2\pi i}{h} S\right]$ tényezővel és A'-vel való egyszerűsítés után kapjuk, hogy:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \sum_{l=1}^{n}\frac{1}{m_l}\left[-\frac{h^2}{8\pi^2}\Delta_{\bar{r}_l} A' - \frac{ih}{2\pi}\left[\nabla_{\bar{r}_l} A', \nabla_{\bar{r}_l} S\right]+\frac{1}{2}\left[\nabla_{\bar{r}_l} S\right]^2 - \frac{ih}{4\pi}\Delta_{\bar{r}_l} S\right]+V \quad (6)$$

Mivel az S függvény ismert, hiszen ez a kvantummechanikai rendszerhez hozzárendelhető klasszikus mechanikai rendszer hatásfüggvénye, a (6) egyenlet ismeretlenje csak az A' függvény. Ezen egyenlet Kronecker vagy Dirac-tipusu ortonormáltsági feltételeket kielégitő megoldásai használhatók fel a $\psi = A'(\bar{r}_1,\ldots,\bar{r}_n)\exp\left[\frac{2\pi i}{h} S\right]$ alakú állapotfüggvényekben.

Ha $h\longrightarrow 0$, akkor a (6) egyenlet a $-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2}\left[\mathrm{grad}_{\bar{r}_l} S\right]^2 + V$ egyenletbe megy át, amely $\mathrm{grad}_{\bar{r}_l} S = \bar{p}_l$ figyelembevételével éppen a kvantummechanikai rendszerhez rendelhető klasszikus mechanikai rendszer Hamilton-Jacobi-egyenlete. A fenti levezetésből látszik, hogy ha ψ-t $\psi = A'(\overline{r}_1,\dots,\overline{r}_n,t)\exp\left[\frac{2\pi i}{h} S\right]$ alakban vennénk fel, ahol A' továbbra is kielégitené (6)-ot, akkor

$$i \frac{h}{2\pi} \frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[ih\,(2\pi)^{-1}\partial_t A' - A'\partial_t S\right]\exp\left[\frac{2\pi i}{h} S\right]$$

lenne, mely $h \longrightarrow 0$ esetén ugyanolyan $- A'\ \partial_t S\ \exp\left[\frac{2\pi i}{h} S\right]$ alakú kifejezésbe megy át, mint amilyen alakú (6) baloldala az A'-vel és $\exp\left[\frac{2\pi i}{h} S\right]$ -val való egyszerűsités előtt. (6) jobboldalának alakja pedig nem változik meg azáltal, hogy A' az időt is explicite tartalmazza, mert a jobboldalon csak térkoordináták szerinti parciális deriválások szerepelnek.

Tehát az állapotfüggvény $A(\overline{r}_1,\dots,\overline{r}_n,t)\exp\left[\frac{2\pi i}{h} S\right]$ alakú is lehet az átmenet során. Mivel a (6) egyenlet minden oldala ugyanaz maradt $h \longrightarrow 0$ esetén, ugyanugy a Hamilton-Jacobi-egyenlet adódik.

Ezt a megengedhető $\psi = A(\overline{r}_1,\dots,\overline{r}_n,t)\exp\left[\frac{2\pi i}{h} S\right]$ alakú állapotfüggvény kváziklasszikus állapotfüggvénynek hivjuk, a kvantumállapotot pedig kváziklasszikus állapotnak.

IRODALOM

[1] Dr. Marx György: Kvantummechanika
Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.

[2] Franczia Tamás: A kvantummechanikai impulzus eltolási szimmetriával történő bevezetéséről I.
Acta Academiae Paedagogicae Agriensis Tom. XVII.Eger,1984.

[3] Franczia Tamás: A kvantummechanikai impulzus eltolási szimmetriával történő bevezetéséről II.
Acta Academiae Paedagogicae Agriensis Tom. XVIII.Eger,1987.

[4] Franczia Tamás: A kvantummechanikai impulzus eltolási szimmetriával történő bevezetéséről III.
Acta Academiae Paedagogicae Agriensis Tom. XIX. Eger,1989.