

## A PELL-SOROZAT NÉHÁNY TULAJDONSÁGÁRÓL

KISS PÉTER, MÁTYÁS FERENC ÉS VÁRNAI FERENC

(Közlésre érkezett: 1978. december 31.)

Definiáljuk az  $R$  sorozatot az  $R_0, R_1$  konstans egészekkel és az

$$R_{n+1} = 2R_n + R_{n-1} \quad (1)$$

( $n > 0$ ) rekurziós formulával. Legyen továbbá

$$k = R_0^2 + 2R_0R_1 - R_1^2.$$

Ha  $R_0 = 0$  és  $R_1 = 1$ , akkor a kapott sorozatot Pell sorozatnak nevezzük, melyet  $P$ -vel, tagjait

$$P_0 (= 0), P_1 (= 1), P_2, \dots, P_n, \dots$$

-nel jelöljük. Ebben az értelemben (1) a Pell sorozat egy általánosítása. Ismeretes, hogy az

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

egyenlet

$$\alpha = 1 + \sqrt{2} \text{ és } \beta = 1 - \sqrt{2}$$

gyökeivel az  $R$  sorozat tagjai

$$R_n = \frac{(R_1 - \beta R_0)\alpha^n - (R_1 - \alpha R_0)\beta^n}{\alpha - \beta} \quad (2)$$

alakban explicite is megadhatók (lásd [10], 89. oldal).

Speciálisan a  $P$  sorozatra

$$P_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad (3)$$

A  $P$  és  $R$  sorozatokat és a  $P$  sorozat más általánosításait már többen vizsgálták, több azonosságot bizonyítottak velük kapcsolatban (lásd például M. Bicknell [2], H. V. Krishna [8], A. F. Horadam [6]). Továbbá néhány szerző rámutatott a másodrendű lineáris rekurzív sorozatok és az  $x^2 - Ny^2 = D$  Pell-egyenlet megoldásai közötti kapcsolatokra. V. E. Hoggatt Jr. [4] bizonyította, hogy az  $x^2 - 5y^2 = \pm 4$  egyenlet összes pozitív egész megoldása  $x = L_n, y = F_n$  alakú, ahol  $L_n$ , illetve  $F_n$  az  $n$ -edik Lucas, illetve Fibonacci szám az  $L_0 = 2, L_1 = 1, F_0 = 0, F_1 = 1$  kezdőelemekkel és  $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$  rekurzióval definiálva. Ezt az eredményt V. E. Hoggatt Jr. és M. Bicknell [5] általánosította az  $x^2 - (a^2 \pm 4)y^2 = \pm 4$  típusú diofantikus egyenletekre. M. J. De Leon [9] bizonyította, hogy ha  $x_0, y_0$  az  $x^2 - 2y^2 = D$  alapmegoldása, akkor  $x_n, y_n$  is megoldás, ahol  $x_n + y_n = (x_0 + y_0)P_{2 \cdot n+1} + y_0 P_{2 \cdot n}$  és  $y_n = (x_0 + y_0)P_{2n} + y_0 P_{2n-1}$ .

Másodrendű rekurzív sorozatok, illetve a  $P$  sorozat és az  $x^2 - 2y^2 = \pm 1$  egyenlet megoldásai között talált hasonló kapcsolatokat E. M. Cohn [3], I. Adler [1] és V. Théault [11].

A következőkben az  $R$  illetve  $P$  sorozatok néhány új tulajdonságát bizonyítjuk, bővítve és általánosítva ezzel [7]-ben elért eredményeinket. Továbbá rámutatunk az  $x^2 - 2y^2 = D$  egyenlet megoldásai és az  $R$  sorozatok tagjai közötti összefüggésre.

**1. tétel:** Minden  $n \geq 0$  természetes szám esetén

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 2R_{2n+1}^2 + (-1)^n k = (R_n + R_{n+1})^2 \\ \text{b)} \quad & 2R_{2n+1}^2 + (-1)^{n+1} k = (R_{n+1} - R_n)(3R_{n+1} + R_n) \end{aligned} \quad (4)$$

Következmények:

$$\begin{aligned} 1. \quad & 2R_{2n+1}^2 + k = (R_{2n} + R_{2n+1})^2 \\ 2. \quad & 2R_{2n+2}^2 + k = (R_{2n+2} - R_{2n+1})(3R_{2n+2} + R_{2n+1}) \\ 3. \quad & 2R_{2n+2}^2 - k = (R_{2n+1} + R_{2n+2})^2 \\ 4. \quad & 2R_{2n+1}^2 - k = (R_{2n+1} - R_{2n})(3R_{2n+1} + R_{2n}) \end{aligned} \quad (5)$$

5. Az  $f(x) = 2x^2 \pm k$  polinom minden  $x = R_i$  helyen vett helyettesítési értéke összetett szám és  $f(R_i) = 2R_i^2 + k$ , illetve  $f(R_i) = 2R_i^2 - k$  négyzetszám, ha  $i$  páratlan, illetve  $i$  páros.

**2. tétel:** Minden  $n \geq 0$  természetes szám esetén

$$2(P_n + P_{n+1})^2 + (-1)^n = P_{2n+1} + P_{2n+2}$$

**3. tétel:** Minden  $n \geq 0$  természetes szám esetén

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 2P_{2n+1}^2 - 1 = \sum_{i=1}^{4n+1} P_i \\ \text{b)} \quad & 2P_{2n+2}^2 - 1 = \sum_{i=2}^{4n+3} P_i \end{aligned}$$

**4. tétel:** Legyen  $D (\neq 0)$  egy egész szám. Ha az

$$x^2 - 2y^2 = D \quad (6)$$

diofantikus egyenlet megoldható, akkor az összes megoldását megadják a véges sok  $R$  sorozat tagjaiból képezett

$$(x, y) = [\pm(R_{2n} + R_{2n+1}), \pm R_{2n+1}]$$

számpárok, ahol  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Továbbá ezen  $R$  sorozatokra

$$0 \leq R_1 < 2\sqrt{D}, \text{ ha } D > 0 \text{ és } 0 < R_1 < \sqrt{-9D/2}, \text{ ha } D < 0.$$

**1. tétel bizonyítása.** A bizonyítást  $n$ -re vonatkozó teljes indukcióval végezzük.

a)  $n = 0$  esetén az állítás nyilvánvaló. Ha

$$(R_i + R_{i+1})^2 - 2R_{i+1}^2 = (-1)^i k$$

igaz valamely  $i \geq 0$ -ra, akkor az  $R$  sorozat definíciója miatt

$$\begin{aligned} (R_{i+1} + R_{i+2})^2 - 2R_{i+2}^2 &= (3R_{i+1} + R_i)^2 - 2(2R_{i+1} + R_i)^2 = \\ &= R_{i+1}^2 - 2R_{i+1}R_i - R_i^2 = (-1) \left( (R_i + R_{i+1})^2 - 2R_{i+1}^2 \right) = \\ &= (-1) (-1)^i k = (-1)^{i+1} k, \end{aligned}$$

ezért igaz az állítás minden  $n \geq 0$  egészre.

b)  $n = 0$  esetén rövid számolással igazolható az állítás. Ha

$$(R_{i+1} - R_i) (3R_{i+1} + R_i) - 2R_{i+1}^2 = (-1)^{i+1} k$$

igaz valamely  $i \geq 0$ -ra, akkor

$$\begin{aligned} (R_{i+2} - R_{i+1}) (3R_{i+2} + R_{i+1}) - 2R_{i+2}^2 &= \\ &= (R_{i+1} + R_i) (7R_{i+1} + 3R_i) - 2(2R_{i+1} + R_i)^2 = \\ &= - (R_{i+1}^2 - 2R_{i+1}R_i - R_i^2) = - \left( (R_{i+1} - R_i) (3R_{i+1} + R_i) - \right. \\ &\left. - 2R_{i+1}^2 \right) = - (-1)^{i+1} k = (-1)^{i+2} k, \end{aligned}$$

amiből következik az állítás minden  $n \geq 0$  egészre.

A következmények a tétel alapján nyilvánvalóak.

## 2. tétel bizonyítása.

Az 1. tétel a) állítása igaz a Pell-sorozatra is ( $P_0 = 0$  és  $P_1 = 1$  miatt  $k = -1$ ), így (4) alapján

$$2(P_n + P_{n+1})^2 + (-1)^n = 4P_{n+1}^2 + (-1)^{n+1},$$

ezért elegendő a

$$4P_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} = P_{2n+1} + P_{2n+2}$$

azonosságot igazolni.  $\alpha + \beta = 2$ ,  $\alpha \cdot \beta = -1$ ,  $(\alpha - \beta)^2 = 8$  és (3)

felhasználásával

$$\begin{aligned} 4P_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} &= 4 \left( \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \right)^2 + (-1)^{n+1} = \\ &= \frac{\alpha^{2n+2} + \beta^{2n+2}}{2} = \frac{\alpha^{2n+2} + \beta^{2n+2}}{2} \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta} = \\ &= \frac{\alpha\alpha^{2n+2} + \alpha\beta^{2n+2} - \beta\alpha^{2n+2} - \beta\beta^{2n+2}}{2(\alpha - \beta)} = \\ &= \frac{(\alpha + \beta)\alpha^{2n+2} - 2\beta\alpha^{2n+2} - (\alpha + \beta)\beta^{2n+2} + 2\alpha\beta^{2n+2}}{\alpha - \beta} = \\ &= \frac{\alpha^2n+2 - \alpha\beta\alpha^{2n+1} - \beta^2n+2 + \alpha\beta\beta^{2n+1}}{\alpha - \beta} = \\ &= \frac{\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{2n+2} - \beta^{2n+2}}{\alpha - \beta} = P_{2n+1} + P_{2n+2} \end{aligned}$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

### 3. tétel bizonyítása.

a) Mivel  $\alpha + \beta = 2$ ,  $\beta - 1 = -(\alpha - 1)$ ,  $2(\alpha - 1) = \alpha - \beta$ ,  $\alpha\beta = -1$ ,  $(\alpha - \beta)^2 = 8$ , ezért (3) felhasználásával

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{4n+1} P_i &= \frac{\alpha - \beta + \alpha^2 - \beta^2 + \alpha^3 - \beta^3 + \dots + \alpha^{4n+1} - \beta^{4n+1}}{\alpha - \beta} = \\ &= \frac{\alpha \frac{\alpha^{4n+1} - 1}{\alpha - 1} - \beta \frac{\beta^{4n+1} - 1}{\beta - 1}}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1})^2 - 4}{\frac{1}{2}(\alpha - \beta)^2} = \\ &= 2 \left( \frac{\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}}{\alpha - \beta} \right)^2 - \frac{8}{(\alpha - \beta)^2} = 2P_{2n+1}^2 - 1 \end{aligned}$$

A b) állítás hasonló módon igazolható.

### 4. tétel bizonyítása.

Elegendő (6) azon  $x, y$  megoldásait meghatározni, melyekre  $x, y \geq 0$ , hiszen ezek már meghatározzák az összes megoldást.

Ha  $x, y \geq 0$  egészekre  $x^2 - 2y^2 = D$ , akkor  $x$  és  $y$  egy  $R$  sorozatot generál, melyre

$$R_{2i+1} = y \text{ és } R_{2i} + R_{2i+1} = x, \quad (7)$$

vagyis  $R_{2i} = x - y$  és  $R_{2i+1} = y$ . A sorozat minden egész indexű tagja értelmezve van (negatív indexre is), mivel a definícióból következik, hogy ha  $R_j$  és  $R_{j+1}$  ismert, akkor

$$R_{j+2} = 2R_{j+1} + R_j \text{ és } R_{j-1} = R_{j+1} - 2R_j$$

minden  $j$  egész szám esetén. Így a (7) által definiált sorozat megadható olyan  $R_0, R_1$  kezdő elemekkel, melyben  $R_1$  a sorozat legkisebb páratlan indexű pozitív tagja. Az így definiált  $R$  sorozat esetén az 1. tétel 1. következménye miatt minden  $x = R_{2n} + R_{2n+1}$ ,  $y = R_{2n+1}$  értékpár kielégíti a (6) egyenletet minden  $n$  egész szám esetén, ugyanis (5) és (6) egybevetéséből  $k = D$  adódik.

Azt kell még belátni, hogy a hasonló tulajdonságú  $R$  sorozatok száma véges. Ezt két lépésben mutatjuk meg, különválasztva a  $D > 0$  és  $D < 0$  eseteket.

Legyen először  $D > 0$ .

Ha  $x_1 > 0$ ,  $y_1 > 0$  egész számok megoldásai (6)-nak, akkor az általuk generált  $R$  sorozat két szomszédos eleme  $R_{2i} = x_1 - y_1$  és  $R_{2i+1} = y_1$ . Az  $R$  sorozat definíciója alapján ekkor  $R_{2i-1} = 3y_1 - 2x_1$ ,  $R_{2i-2} = 5x_1 - 7y_1$  és így (5) miatt az

$$x_2 = R_{2i-2} + R_{2i-1} = 3x_1 - 4y_1$$

$$y_2 = R_{2i-1} = 3y_1 - 2x_1$$

számpár is megoldása (6)-nak. De

$$y_2 = 3y_1 - 2x_1 = 3y_1 - 2\sqrt{2y_1^2 + D} < (3 - 2\sqrt{2})y_1 < y_1$$

és

$$x_2 = 3x_1 - 4y_1 = 3x_1 - 4\sqrt{(x_1^2 - D)/2} = 3x_1 - \sqrt{8x_1^2 - 8D} > 0,$$

így az  $(x_1, y_1)$  megoldás által generált megoldásokra

$$y_{i+1} < y_i \text{ és } y_{i+1} = 3y_i - 2\sqrt{2y_i^2 + D} \geq 0$$

ha  $y_i \geq 2\sqrt{D}$ . Ezért valamely  $j$  esetén  $0 \leq y_j < 2\sqrt{D}$ , és így az  $(x_1, y_1)$  megoldás által meghatározott  $R$  sorozat generálható olyan  $R_0 = x_j - y_j$ ,  $R_1 = y_j$  kezdő értékpárral, melyre  $0 \leq R_1 < 2\sqrt{D}$ , azaz  $D > 0$  esetben (6) összes pozitív megoldása megadható olyan  $R$  sorozatok segítségével, ahol  $0 \leq R_1 < 2\sqrt{D}$ . Az ilyen  $R$  sorozatok száma nyilván véges.

Vizsgáljuk meg most a  $D < 0$  esetet.

Ha  $x_1, y_1 > 0$  egészek megoldásai (6)-nak, akkor az előbbieik szerint  $x_2 = 3x_1 - 4y_1$  és  $y_2 = 3y_1 - 2x_1$  szintén megoldások. Az eljárást folytatva megmutatjuk, hogy  $x_{i+1} \geq 0$  és  $0 < y_{i+1} < y_i$ , ha  $y_i \geq \sqrt{-9D/2}$ . Ugyanis, ha  $y_i \geq \sqrt{-9D/2}$ ,  $x_i \geq 0$  és  $x_i^2 - 2y_i^2 = D$ ,

$$\text{akkor } x_i = \sqrt{2y_i^2 + D} \geq \sqrt{-8D},$$

melyből

$$x_{i+1} = 3x_i - 4y_i = 3x_i - 4\sqrt{(x_i^2 - D)/2} \geq 0$$

adódik. Továbbá mivel  $D < 0$ ,

$$y_{i+1} = 3y_i - 2x_i = 3y_i - 2\sqrt{2y_i^2 + D} > (3 - 2\sqrt{2}) y_i > 0$$

és

$$y_i \geq \sqrt{-9D/2} \text{ felhasználásával}$$

$$y_{i+1} = 3y_i - 2\sqrt{2y_i^2 + D} < y_i$$

adódik. Így  $D < 0$  esetben (6) megoldásait megkaphatjuk azon  $R$  sorozatok segítségével, ahol  $0 < R_1 < \sqrt{-9D/2}$  és  $x = R_0 + R_1$ ,  $y = R_1$  megoldások.

1. megjegyzés. (2)-t használva (6) összes megoldását megadhatjuk az

$$\begin{aligned} x_n &= \pm (R_{2n} + R_{2n+1}) = \\ &= \pm \frac{(R_1 + R_0 + \alpha R_1 - \beta R_0) \alpha^{2n} - (R_1 + R_0 + \beta R_1 - \alpha R_0) \beta^{2n}}{\alpha - \beta}, \\ y_n &= \pm R_{2n+1} = \pm \frac{(R_1 - \beta R_0) \alpha^{2n+1} - (R_1 - \alpha R_0) \beta^{2n+1}}{\alpha - \beta} \end{aligned}$$

számpárokkal, ahol  $n = 0, 1, 2, \dots$  és  $R_1$  végigfut az összes olyan egész számon, melyekre  $\sqrt{2R_1^2 + D}$  egész és  $D > 0$  esetben  $0 \leq R_1 < 2\sqrt{D}$ ,  $D < 0$  esetben pedig  $0 < R_1 < \sqrt{-9D/2}$ ; az  $R_1$ -hez tartozó  $R_0 = \pm\sqrt{2R_1^2 + D} - R_1$ .

2. megjegyzés. Ha az  $R$ -sorozatot kiterjesztjük negatív indexű tagokra is a definícióból adódó  $R_{n-2} = R_n - 2R_{n-1}$  formula segítségével, akkor a (6) egyenlet megoldásainak felírásához minden  $R_1$  értékhez elegendő az  $R_0 = \pm\sqrt{2R_1^2 + D} - R_1$  értékek közül

csak az egyiket figyelembe venni. Ha ugyanis egy  $R$  sorozatot az  $R_1 = y, R_0 = x - y$ ; egy  $R'$  sorozatot pedig  $R'_1 = y, R'_0 = -x - y$  kezdő értékekkel definiálunk, akkor (2) alapján

$$R'_{-n} = \frac{(y - \beta(-x-y))\alpha^{-n} - (y - \alpha(-x-y))\beta^{-n}}{\alpha - \beta}, \quad (8)$$

mivel könnyen belátható, hogy (2) negatív  $n$  esetén is fennáll.

$\alpha\beta = -1, \alpha^2 = 2\alpha + 1$  és  $\beta^2 = 2\beta + 1$  alapján (8)-ból adódik, hogy

$$\begin{aligned} R'_{-n} &= (-1)^{n+2} \frac{(y - \beta(-x-y))\alpha^2 \beta^{n+2} - (y - \alpha(-x-y))\beta^2 \alpha^{n+2}}{\alpha - \beta} = \\ &= (-1)^{n+2} \frac{(y(2\alpha + 1) + \alpha(-x-y))\beta^{n+2} - (y(2\beta + 1) + \beta(-x-y))\alpha^{n+2}}{\alpha - \beta} = \\ &= (-1)^{n+1} \frac{(y - \beta(x-y))\alpha^{n+2} - (y - \alpha(x-y))\beta^{n+2}}{\alpha - \beta} = (-1)^{n+1} R_{n+2} \end{aligned}$$

minden egész  $n$ -re. Így a (6) egyenlet  $R'$  sorozat által meghatározott megoldásaira

$$|y'_i| = |R'_{2i+1}| = |(-1)^{-2i} R_{-2i+1}| = |y_{-i}|$$

és

$$\begin{aligned} |x'_i| &= |R'_{2i} + R'_{2i+1}| = |(-1)^{-2i+1} R_{-2i+2} + (-1)^{-2i} R_{-2i+1}| = \\ &= |-R_{-2i+2} + R_{-2i+1}| = |-R_{-2i} - R_{-2i+1}| = |R_{-2i} + R_{-2i+1}| = |x_{-i}|. \end{aligned}$$

Tehát az  $R'$  által generált megoldások nem különböznek az  $R$  által generáltaktól.

*Példa:* Adjuk meg példaként az

$$x^2 - 2y^2 = 7 \quad (9)$$

egyenlet összes megoldásait.  $2\sqrt{7} < 6$ , ezért ha az egyenlet megoldható, akkor  $y = 0, 1, 2, 3, 4$  vagy  $5$ . Behelyettesítéssel adódik, hogy csak  $y = 1$  és  $y = 3$  esetén kapunk megoldást. Az  $y = 1$  esetén  $x = 3$  (vagy  $x = -3$ ) és az általuk generált  $R$  sorozat kezdő elemei  $R_0 = 2, R_1 = 1$ . A sorozat elemei:  $\dots, R_{-4} = 46, R_{-3} = -19, R_{-2} = 8, R_{-1} = -3, R_0 = 2, R_1 = 1, R_2 = 4, R_3 = 9, R_4 = 22, R_5 = 53, \dots$ . Ezek alapján (9) megoldásai:  $\dots, (\pm 27, \pm 19), (\pm 5, \pm 3), (\pm 3, \pm 1), (\pm 13, \pm 9), (\pm 75, \pm 53), \dots$

Az  $y = 3$  megoldás szerepelt a felsoroltakban, ezért az általa meghatározott  $R$  sorozat nem ad újabb megoldásokat, így (9) összes megoldását a felsoroltak szolgáltatják.

Megadjuk a megoldásokat expliciten is. Mivel  $R_0 = 2, R_1 = 1, \alpha = 1 + \sqrt{2}$  és  $\beta = 1 - \sqrt{2}$ ,

$$R_1 + R_0 + \alpha R_1 - \beta R_0 = 2 + 3\sqrt{2},$$

$$R_1 + R_0 + \beta R_1 - \alpha R_0 = 2 - 3\sqrt{2},$$

$$R_1 + \beta R_0 = -1 + 2\sqrt{2},$$

$$R_1 - \alpha R_0 = -1 - 2\sqrt{2}$$

Ezek alapján (9) megoldásai:

$$x_n = \pm \frac{(2 + 3\sqrt{2})(1 + \sqrt{2})^{2n} - (2 - 3\sqrt{2})(1 - \sqrt{2})^{2n}}{2\sqrt{2}},$$

$$y_n = \pm \frac{(-1 + 2\sqrt{2})(1 + \sqrt{2})^{2n+1} - (-1 - 2\sqrt{2})(1 - \sqrt{2})^{2n+1}}{2\sqrt{2}},$$

ahol  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

#### IRODALOM

- [1] *I. Adler*: Three diophantine equations I and II, *Fib. Quart.*, 6 (1968), 360–369, 317 és 7 (1969), 181–193.
- [2] *M. Bicknell*: A primer on the Pell sequence and related sequences, *Fibonacci Quart.*, 13 (1975), 345–349.
- [3] *E. M. Cohn*: Complete diophantine solution the Pythagorean triple  $(a, b = a + 1, c)$ , *Fib. Quart.*, 8 (1970) 402–405.
- [4] *V. E. Hoggatt Jr.*: Some more Fibonacci diophantine equations, *Fibonacci Quart.*, 9 (1971), 437 és 448.
- [5] *V. E. Hoggatt Jr.–M. Bicknell*: A primer for the Fibonacci numbers XVII. *Fibonacci Quart.* 16 (1978), 130–138.
- [6] *A. F. Horadam*: Pell identities, *Fibonacci Quart.* 9 (1971), 245–252, 263.
- [7] *P. Kiss–F. Várnai*: On generalized Pell numbers, *Math. Sem. Not. (Kobe Univ., Japan)* 6 (1978), 259–267.
- [8] *H. V. Krishna*: Properties of the Pell sequence, *Math. Education*, 5 (1971), 118–120.
- [9] *M. J. De Leon*: Pell's equations and Pell number triples, *Fibonacci Quart.*, 14 (1976), 146–460.
- [10] *I. Niven–H. S. Zuckerman*: Bevezetés a számelméletbe, Műszaki Könyvkiadó Bp., 1978.
- [11] *V. Thébault*: Sur des suites de Pell, *Math esis*, 65 (1956), 390–395.