KÚPSZELETEK METSZÉSPONTJAINAK MEGHATÁROZÁSÁRÓL II.

Dr. PELLE BÉLA
Közlésre érkezett: 1968. dec. 21.

A kúpszeletek metszéspontjainak meghatározásánál előző dolgozatunkban (1) a kúpszeletek fokális egyenleteiből indultunk ki, ahol a koordináták közötti összefüggést az alábbi lineáris transzformáció szolgáltatta:

$$\bar{x}_i = \sum_{k=1}^{2} a_{ik} x_k + b_i \qquad i = 1, 2 \tag{3}$$

és

$$\sum_{i=1}^{2} a_{ik} a_{il} = \delta_{kl} = \begin{cases} 0 \text{ ha } & k \neq l \\ 1 \text{ ha } & k = l \end{cases} \qquad k, l = 1, 2 \tag{4/a}$$

továbbá

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1 \tag{4/b}$$

Ezen transzformáció mellett a kúpszeletek metszéspontjait a következő egyenlet szolgáltatja:

$$(e_1 x_1 + p_1)^2 + 2x_1 (a_{11} b_1 + a_{21} b_2) + 2 \sqrt{(e_1 x_1 + p_1)^2 - x_1^2} \cdot (a_{12} b_1 + a_{22} b_2) +$$
$$+ b_1^2 + b_2^2) = [e_2 (a_{11} x_1 + a_{12} \sqrt{(e_1 x_1 + p_1)^2 - x_1^2} + b_2) + p_2]^2 \tag{6}$$

Milyen feltételek mellett szerkeszthetők meg a metszéspontok?

a) A fent idézett dolgozatunkban kimutattuk, hogy ha a kúpszeletek egyenletei

$$x_1^2 + x_2^2 = (e_1 x_1 + p_1)^2$$
$$\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 = (e_2 \bar{x}_1 + p_2)^2 , \tag{1}$$

és koordinátái között az

$$\bar{x}_i = \sum_{k=1}^{2} a_{ik} x_k \tag{10}$$

lineáris transzformáció szolgáltatja az összefüggést, akkor a metszéspontok szerkeszthetők. Ebben az esetben a kúpszeletek egyik fókusza közös.

Ugyancsak kimutattuk, hogy a metszéspontok e feltételek mellett reciprocitással is szerkeszthetők, ahol főpontnak a közös fókuszt kell választani.

b) Vizsgáljuk a következőkben, hogy ha az $\bar{x}_i$ és x_i koordináták között az

$$\bar{x}_i = x_i + b_i\,, \qquad i = 1,\ 2 \tag{22}$$

lineáris transzformáció létesít kapcsolatot, szerkeszthetők-e a kúpszeletek metszéspontjai. E feltételek mellett (6) alakja:

$$\begin{aligned}(e_1 x_1 + p_1)^2 + 2 x_1 b_1 + 2 b_2 \sqrt{(e_1 x_1 + p_1)^2 - x_1^2} + (b_1^2 + b_2^2) = \\ = [e_2 (x_1 + b_2) + p_2]^2\,.\end{aligned} \tag{23}$$

I. *Ha a (23)-as egyenletben $b_2=0$, akkor a két kúpszelet metszéspontjai megszerkeszthetők.*

Bizonyítás: Helyettesítsük be b_2 értékét az egyenletbe. Akkor ez a következő alakú lesz:

$$(e_1 x_1 + p_1)^2 + 2 x_1 b_1 + b_1^2 = [e_2 x_1 + p_2]^2 \tag{24}$$

Négyzetreemelés és rendezés után:

$$x_1^2 (e_1^2 - e_2^2) + x_1 (2 e_1 p_1 + 2 b_1 - 2 e_2 p_2) + p_1^2 + b_1^2 - p_2^2 = 0$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} M &= e_1^2 - e_2^2 \\ N &= 2 e_1 p_1 + 2 b_1 - 2 e_2 p_2 \\ L &= p_1^2 + b_1^2 - p_2^2 \end{aligned} \tag{25}$$

Ezek felhasználásával az egyenlet:

$$M x_1^2 + N x_1 + L = 0 \tag{26}$$

Ebből a metszéspontok abcisszái meghatározhatók. Az ordinátákat pedig az

$$x_2^2 = (e_1 x_1 + p_1)^2 - x_1^2 \text{ egyenlet szolgáltatja.} \tag{27}$$

Mivel M, N, L (25) alapján szerkeszthető, így (26) és (27) gyökei szerkeszthetők. Ezzel állításunkat igazoltuk.

Mivel mindkét kúpszeletnek az x_1 tengely szimmetria tengelye, a metszéspontok szimmetrikusak x_1-re. Tehát ha van metszéspont, azok száma 4 vagy 2.

Összefoglalva: Ha adva vannak az

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (e_1 x_1 + p_1)^2 \\ \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 &= (e_2 \bar{x}_1 + p_2)^2 \end{aligned} \tag{28}$$

kúpszeletek és a koordináták között az

$$\bar{x}_1 = x_1 + b_1$$
$$\bar{x}_2 = x_2$$

lineáris transzformációs kapcsolat van, a kúpszeletek metszéspontjai megszerkeszthetők. A feltételek szerint tehát mindazon kúpszeletek metszéspontjai, amelyeknek nagytengely-, főtengely-, valóstengely-egyenesei egybeesnek, megszerkeszthetők.

Speciális eset: Ha $b_1 = b_2 = 0$, akkor a két kúpszelet között az $\bar{x}_i = x_i$ identikus transzformáció létesít kapcsolatot. A metszéspontok abcisszáit az $Mx_1^2 + Nx_1 + L = 0$ egyenletből számíthatjuk ki, ahol

$$M = e_1^2 - e_2^2$$
$$N = 2\,e_1\,p_1 - 2\,e_2\,p_2$$
$$L = p_1^2 - p_2^2$$

Az ordináták pedig az $x_2^2 = (e_1 x_1 + p_1)^2 - x_1^2$ egyenletből adódnak.

E speciális esetben a *kúpszeletek egyik fókusza közös, a metszéspontok reciprocitással is szerkeszthetők.*

1. megjegyzés: A (28)-ban szereplő k_1 és k_2 kúpszeletek közös polárháromszögének egyik oldala a közös x_1 tengely, a vele szemben levő csúcspontja az x_1 tengelyre merőleges egyenes végtelen távoli pontja. Ezek ismeretében a metszéspontok a következőkép is megszerkeszthetők:

a) A sík tetszőleges P_1 és P_2 pontjához megkeressük a k_1 és k_2 kúpszeletekhez közös kapcsolt pólusokat, Q_1 és Q_2-t.

b) P_1, Q_1; P_2, Q_2-ből merőlegeseket húzunk az x_1 tengelyre, és ezen involuciós sugársor kettős sugarait megszerkesztjük. Ezeken lesznek rajta a metszéspontok.

c) Megszerkesztjük az egyeneseknek (kettőssugarak) és az egyik kúpszeletnek a metszéspontjait [2].

2. megjegyzés: Alkalmazzunk az általános eset kúpszeleteire egy reciprocitást, amikor a főpont az egyik kúpszelet fókusza. A két kúpszelet képe kör és kúpszelet lesz, ahol a kör középpontja a tengelyekre illeszkedik. Ezek közös érintőinek visszaállítottjai lesznek a metszéspontok. A kép-kúpszelet ellipszis akkor, ha a főpontra egy érintője sem illeszkedik a transzformálandó kúpszeletnek, parabola, ha a főpont illeszkedik a kúpszeletre és hiperbola, ha a főpontra két érintő illeszkedik az eredeti kúpszeletnél.

Ha a reciprocitással két kúpszelet metszéspontjainak meghatározását kör és ellipszis közös érintőinek megszerkesztésére sikerült visszavezetni, a feladat térmértani meggondolással megoldható [3].

Ha kör és parabola közös érintőinek meghatározására vezettük vissza a feladatot, ugyancsak térmértani meggondolással szintén megoldhatjuk [4].

II. *Ha a (23)-as egyenletben $e_1=e_2=e$, akkor a két kúpszelet metszéspontjai megszerkeszthetők.*

Bizonyítás: Ha az egyenletbe e_1 és e_2 helyébe e-t írunk, a következő alakú lesz:

$$(e x_1 + p_1)^2 + 2 b_1 x_1 + 2 b_2 \sqrt{(e x_1 + p_1)^2 - x_1^2} + (b_1^2 + b_2^2) = [e x_1 + e b_2 + p_2]^2$$

Ebből rendezés, négyzetreemelés, majd ismét rendezés után az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned} x_1^2 [(2 e p_1 - 2 e p_2 + 2 b_1 - 2 e^2 b_2)^2 - 4 b_2^2 e^2 + 4 b_2^2] + x_1 [4 (e p_1 - e p_2 + \\ + b_1 - e^2 b_2)(p_1^2 - p_2^2 - e^2 b_2^2 - 2 e b_2 p_2 + b_1^2 + b_2^2) - 8 e b_2^2 p_1] + \\ + [(p_1^2 - p_2^2 - e^2 b_2^2 - 2 e b_2 p_2 + b_1^2 + b_2^2)^2 - 4 b_2^2 p_1^2] = 0 \end{aligned}$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} M &= (2 e p_1 - 2 e p_2 + 2 b_1 - 2 e^2 b_2)^2 - 4 b_2^2 e^2 + 4 b_2^2 \\ N &= 4 (e p_1 - e p_2 + b_1 - e^2 b_2)(p_1^2 - p_2^2 - e^2 b_2^2 - 2e b_2 p_2 + b_1^2 + b_2^2) - 8 e b_2^2 p_1 \\ L &= (p_1^2 - p_2^2 - e^2 b_2^2 - 2 e b_2 p_2 + b_1^2 + b_2^2)^2 - 4 b_2^2 p_1^2 \end{aligned}$$

Az egyenlet ezután a következő alakba írható:

$$M x_1^2 + N x_1 + L = 0 \tag{29}$$

Ebből a metszéspontok abcisszái meghatározhatók, az ordinátákat pedig az $x_2^2 = (e x_1 + p_1)^2 - x_1^2$-ből számíthatjuk ki.

Mivel az M, N, L értékek szerkeszthetők, a (29)-es egyenlet gyökei szerkeszthetők. Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

A levezetésből kitűnik, hogy minden x_1 értékhez kettő x_2 tartozik, amelyek szimmetrikusak az x_1 tengelyre. A két kúpszelet nem szimmetrikus x_1-re, így a metszéspontok sem, vagyis minden x_1-hez csak egy x_2 tartozik. Ezért az $(x_1 x_2)$ párokhoz a transzformációs képlettel meghatározzuk az $(\bar{x}_1 \bar{x}_2)$ párokat. Amelyek ezek közül kielégítik az

$$\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 = (e \bar{x}_1 + p_2)^2$$

egyenletet, az azokhoz tartozó $(x_1 x_2)$ párok lesznek a megoldások.
Ebben a pontban tárgyalt kúpszeleteknél a numerikus excentricitások egyenlők, tehát

$$c_2 = \lambda c_1 \ , \ a_2 = \lambda a_1 \ , \ b_2 = \lambda b_1$$

Összefoglalva: Ha adva vannak az

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (e x_1 + p_1)^2 \\ \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 &= (e \bar{x}_1 + p_2)^2 \end{aligned} \tag{30}$$

kúpszeletek és a koordináták között az

$$\bar{x}_1 = x_1 + b_1$$
$$\bar{x}_2 = x_2 + b_2$$

lineáris transzformáció létesít kapcsolatot, a kúpszeletek metszéspontjai megszerkeszthetők. A feltételek szerint tehát az olyan ellipszis — ellipszis, parabola — parabola, hiperbola — hiperbola metszéspontjai megszerkeszthető, amelyeknél a numerikus excentricitások egyenlők és a tengelyek párhuzamosak.

Speciális esetek:

a) Ha $b_2 = 0$, akkor az I. csoportnak egy speciális esetét kapjuk.

b) Ha $b_1 = b_2 = 0$, akkor az I. csoport speciális esetének speciális esetével állunk szemben.

1. megjegyzés: A (30)-ban szereplő kúpszeletek metszéspontjainak szerkesztését szintén el lehet végezni az I. pont 1. megjegyzése szerint. A feltételekből következik, hogy a két kúpszelet hasonló és hasonló helyzetű. A két kúpszelet közös polárháromszögének egyik oldala a két kúpszelet középpontjára illeszkedő egyenes, illetve a parabola esetén a sík végtelen távoli egyenese. A közös polárháromszög szemközti csúcspontja pedig a két középpontra illeszkedő átmérővel konjugált átmérők közös végtelen távoli pontja (a két kúpszelet megfelelő konjugált átmérő-párjai a hasonló helyzet miatt párhuzamosak). Parabolák esetében a szemközti csúcs a tengelyek közös végtelen távoli pontja. (Ekkor elfajult polárháromszögről van szó, de a szükséges szerkesztés ebben az esetben is elvégezhető.) Az I. 1. megjegyzésben ismertetett szerkesztés ebben az esetben (ellipszisnél és hiperbolánál) a konjugált irányok meghatározásával bővül. Ezek pedig a következőkép végezhetők el.

a) Ellipszis esetében az adott átmérőhöz konjugált irány affinitással szerkeszthető (legyen az ellipszis képe a fő-kör).

b) Hiperbolánál a két asszimptotához és az adott átmérőhöz harmonikus elem lesz a konjugált irány [5]. Így a középpontra illeszkedő a, b, c elemhármashoz harmonikus negyediket kell szerkeszteni, ahol a, b az asszimptotákat jelenti, c pedig a két középpontot összekötő átmérőt.

2. megjegyzés: A két ellipszis metszéspontjának meghatározásánál a két ellipszis egy síkban fekvő két kör vetületeként fogható fel. A sík hajlásszöge a rajz síkjához:

$\cos\alpha = \frac{b}{a}$ ahol b az ellipszis kistengelye és a az ellipszis nagytengelye, illetve a kör sugara, továbbá $a_2 = \lambda a_1$ és $b_2 = \lambda b_1$.

Forgassuk a körök közös síkját x_1 körül a rajz síkjával párhuzamos síkba. A leforgatottak és képek között affin vonatkozás áll fenn, a vezérkörök metszéspontjaiból, tehát az ellipszisek metszéspontjai affinitással nyerhetők.

III. *Ha a (23)-as egyenletben $e_1 = 1$ és $p_1 = 0$, akkor a kúpszeletek metszéspontjai megszerkeszthetők.*

Bizonyítás: Írjuk be e_1 és p_1 értékeit a (23)-as egyenletbe. Ekkor a következőt kapjuk:

$$x_1^2 + 2x_1 b_1 + b_1^2 + b_2^2 = [e_2 x_1 + e_2 b_2 + p_2]^2$$

Négyzetreemelés és rendezés után:

$$x_1^2(1 - e_2^2) + x_1(2b_1 - 2e_2^2 b_2 - 2e_2 p_2) + (b_1^2 + b_2^2 - e_2^2 b_2^2 - p_2^2 - 2e_2 b_2 p_2) = 0$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} M &= 1 - e_2^2 \\ N &= 2b_1 - 2e_2^2 b_2 - 2e_2 p_2 \\ L &= b_1^2 + b_2^2 - e_2^2 b_2^2 - 2e_2 b_2 p_2 \end{aligned}$$

Ezek felhasználásával az egyenlet:

$$M x_1^1 + N x_1 + L = 0$$

Mivel M, N, L értékek szerkeszthetők, a metszéspontok abcisszái a másodfokú egyenletből megszerkeszthetők. Az ordináták értéke a feltételek szerint nulla. Ezzel a tételt igazoltuk.

Összefoglalva: Ha adva vannak az

$$\begin{gathered} x_2^2 = 0 \\ \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 = (e_2 \bar{x}_1 + p_2)^2 \end{gathered} \tag{31}$$

kúpszeletek és a koordináták között az

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= x_1 + b_1 \\ \bar{x}_2 &= x_2 + b_2 \end{aligned}$$

lineáris transzformációs kapcsolat van, a metszéspontok meghatározhatók.

A feltételek szerint tehát *kúpszelet és egyenes* (a nagytengellyel, valóstengellyel párhuzamos egyenes) *metszéspontjai megszerkeszthetők.*

Megjegyzés: Minden ilyen metszési feladat reciprocitással is megszerkeszthető. A reciprocitás centrumának a kúpszelet fókuszát választva, a kúpszelet képe kör lesz, az $x_2 = 0$ egyenesé pont. A pontból a körhöz húzott érintők visszaállítottjai lesznek a metszéspontok.

JEGYZETEK

[1] Pelle Béla: Kúpszeletek metszéspontjainak meghatározásáról (Az Egri Tanárképző Főiskola TK. 1968.)
[2] Klug Lipót: A projektív geometria elemei. (1892. Franklin-Társulat, Budapest. 189. oldal.)
[3] Vigassy Lajos: Síkmértani szerkesztések térmértani megoldással. (Tankönyvkiadó, 1957. Középiskolai Szakköri füzet, 22. oldal, 17., 18. feladat.)
[4] Vigassy Lajos: Uo. (73. oldal, 72. feladat.)
[5] Klug Lipót: Uo. (117. pont, 154. oldal.)

ZUSAMMENFASSUNG

Die hier veröffentliche Mitteilung ist Teil einer grösseren, umfassenderen Arbeit. In der ersten Mitteilung haben wir bewiesen, dass die Schneidepunkte von zwei Kegelschnitten mit gemeinsamen Fokus konstruierbar sind. Zu diesem Fall zeigten wir auch ein einheitliches Verfahren. Im 2. Teil der Arbeit untersuchen wir den Fall: unter welchen Bedingungen sind die Schneidepunkte konstruierbar, wenn die Verbindung zwischen zwei Kegelschnitten durch die lineare Transformation: $\bar{x}_i = x_i + b_i$, i=1, 2 zustande gebracht wird. Wir beweisen, dass die Schneidepunkte konstruierbar sind, wenn

a) $b_2 = 0$

b) $e_1 = e_2 = e$

c) $e_1 = 1, \; p_1 = 0$ sind,

wo

e_i, p_i, b_i als Angaben der fokalen Gleichungen der Kegelschnitte vorkommen.

IRODALOM

Hajós György: Bevezetés a geometriába (Tankönyvkiadó, 1960.)
Kárteszi Ferenc: Ábrázoló geometria (Tankönyvkiadó, 1957.)
Klug Lipót: A projektív geometria elemei (Franklin-Társulat, Budapest, 1892.)
Erwin Kreyszig: Differentialgeometrie (Leipzig, 1957.)
Schopp János: Kúpszeletek (Középiskolai Szakköri Füzetek 1955. Tankönyvkiadó.)
Eduard Stiefel: Lehrbuch der Darstellenden Geometrie (Basel, 1947.)
Vigassy Lajos: Síkmértani szerkesztések térmértani megoldással. (Középiskolai Szakköri Füzetek 1957, Tankönyvkiadó.)
Vigassy Lajos: Geometriai transzformációk. (Középiskolai Szakköri Füzetek 1963, Tankönyvkiadó.)
Zigány Ferenc: Ábrázoló geometria (Tankönyvkiadó, 1951.)