EGY SZÁMELMÉLETI PROBLÉMA MEGOLDÁSÁNAK SZÁMÍTÓGÉPES ELEMZÉSE

KONCZ JÓZSEF

(Közlésre érkezett: 1978. december 31.)

G. D. Poole [1] olyan tulajdonságú tízes számrendszerbeli számokat keresett, melyek egyenlők számjegyeik faktoriálisának összegével. Számítógép segítségével kimutatta, hogy csak négy ilyen tulajdonságú tízes számredszerbeli szám van.
Ezek: 1, 2, 145 és 40 585.

Ehhez a kérdéshez hasonló az úgynevezett Steinhaus probléma is.
Legyen $A=\overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}$ egy tízes számrendszerben felírt szám: $a_n, a_{n-1}, \dots a_0$ számjegyekkel, és értelmezzük a következő függvényt:

$F(A) = a_n^k + a_{n-1}^k + a_0^k$ ahol k természetes szám.

Steinhaus [2] $k = 2$ esetén, K. Iséki [3] $k = 3$ esetén, K. Chikawa, K. Iséki és T. Kusakabe [4] $k = 4$ esetén, K. Chikawa, K. Iséki, T. Kusakabe és K. Shibamura [5] $k = 5$ esetén, E. T. Arasuov és V. A. Gusev [6] pedig $k = 6$ és $k = 7$ esetén, Kiss Péter [7] $k = 8$ esetén bebizonyították, hogy tetszőleges A-ból kiindulva az

$A, A_1, A_2, \dots$ sorozat ciklikus, ahol $A_1 = F(A)$, $A_2 = F(A_1)$, ... Ez azt jelenti, hogy valamely i-re $A_i = A_j$ $(j < i)$, azaz az

$A_j, A_{j+1}, \dots A_{i-1}$ tagok ismétlődnek.

Kiss Péter [8] általánosította a problémát. Bebizonyította, hogy ha $f(x)$ egy nem negatív, egész értékű függvény értelmezve van a 0, 1, 2, 3, ... 9 számjegyekre, és

$$F(A) = \sum_{i=0}^{n} f(a_i) = A_1 \quad \text{akkor az}$$

$A, A_1, A_2, \dots$ sorozat – ahol $A_i = F(A_{i-1})$ minden $i > 1$-re ciklikus és a különböző ciklusok száma véges.

Hasonló a fentiekhez egy – Erdős Pál által felvetett probléma.

Tekintsük az $A = \overline{a_n\, a_{n-1} \dots a_0}$ tízes számrendszerbeli számot, amelynek számjegyei $a_n, a_{n-1}, \dots a_0$. Értelmezzük a következő függvényt:

$$F(A) = (a_n + d) \cdot (a_{n-1} + d) \dots (a_0 + d) \tag{1}$$

ahol d nem negatív egész szám. Legyen $A_1 = F(A), A_2 = F(A_1), \dots$
Így az

$$A, A_1, A_2 \dots \tag{2}$$

sorozatot kapjuk.

Erdős Pál felvetette a kérdést, hogy a (2) sorozat milyen d értékek esetén nem divergens minden A természetes számnál, illetve milyen d esetén ciklikus a (2) sorozat minden A-ra, valamint, hogy meghatározhatók-e a különböző ciklusok.

A továbbiakban ezt a problémát vizsgáljuk, és megadjuk a teljes választ $d = 10$, $d = 0$ és $d = 1$ esetén.

1. Ha $d = 10$ akkor a (2) sorozat szigorúan monoton növekvő és felülről nem korlátos. (Minden A természetes szám esetén.)
   Ugyanis $A < 10^{n+1}$ esetén

   $$F(A) = (a_n + 10) \cdot (a_{n-1} + 10) \cdot \ldots \cdot (a_0 + 10) > 10^{n+1}$$

   azaz $F(A) > A$ minden A természetes számra.
2. $d = 0$ esetén $F(A) = a_n \cdot a_{n-1} \ldots a_0$.
   - Amennyiben $a_i = 0$, valamely $0 \leqslant i \leqslant n$ esetén, úgy a (2) sorozatban minden $A_j = 0$ ha $j > 0$, tehát a (2) sorozat ciklikus.
   - Tételezzük fel minden i-re, hogy $a_i \neq 0$ de van legalább egy i index úgy, hogy $1 \leqslant a_i < 9$.
     Legyen $k = \min \{a_i\} < 9$

Ekkor $A \geqslant k \cdot \dfrac{10^{n+1}-1}{9}$ és $F(A) \leqslant k \cdot 9^n$

Mivel $1 \leqslant k < 9$ és $k \cdot 9^n < k \cdot \dfrac{10^{n+1}-1}{9}$ minden $n > 0$-ra igaz,

ezért $A_1 = F(A) \leqslant k \cdot 9^n < k \cdot \dfrac{10^{n+1}-1}{9} \leqslant A$.

   - Ha minden $0 \leqslant i \leqslant n$-re $a_i = 9$ igaz, akkor

     $$A = 10^{n+1} - 1 \text{ és } F(A) = 9^{n+1}$$

     Mivel $10^{n+1} - 9^{n+1} > 1$ minden $n > 0$-ra igaz, ezért $A_1 = F(A) < A$.
     Tehát minden $A \geqslant 10$ esetén $F(A) < A$, ezért a (2) sorozat szigorúan csökkenő, amíg $A_i < 10$ bekövetkezik.
     Ettől kezdve a (2) sorozat minden tagjára $A_i = A_{i+1} = A_{i+2} = \ldots$
     Így $d = 0$ esetén a ciklusok előállnak, ha az 1 jegyű számokat vizsgáljuk. Minden ciklus 1 elemű. Ezek a következők:
     0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
3. $d = 1$ esetén $F(A) = (a_n + 1) \cdot (a_{n-1} + 1) \cdot \ldots \cdot (a_0 + 1)$.
   Bebizonyítjuk, hogy az $A, A_1, A_2 \ldots$ sorozat ciklikus minden A esetén, és a különböző ciklusok száma véges.
   - Ha valamely $0 \leqslant i \leqslant n$ esetén $a_i = 0$ és $n > 0$ akkor $A \geqslant 10^n$ és $F(A) = 10^n$. Az $A = 10^n$ csak akkor teljesül, ha $a_n = 1$ és minden $0 \leqslant i \leqslant n$ esetén $a_i = 0$. Ekkor viszont $F(A) < 10^n$. Így $A > A_1$.
   - Legyen a továbbiakban $0 < k = \min\{a_i\}$ és $k \leqslant K = \max\{a_i\}$
     Ha $K = 9$ akkor $A > 10^n$. Ekkor viszont $A_1 = F(A) \leqslant (k + 1) \cdot 10^n$ és $F(A)$ osztható 10-zel, azaz $F(A)$ tartalmaz 0 számjegyet.
     Ekkor viszont $A_2 = F(A_1) \leqslant 10^n$, azaz $A_2 < A$.
     Ha $K < 9$ akkor

     $$A \geqslant k \cdot 10 \frac{10^n - 1}{9} + K \text{ és } F(A) \leqslant (k + 1) \cdot (K + 1)^n \qquad (3)$$

     Bebizonyítjuk, hogy minden $n \geqslant 5$ esetén $F(A) < A$.

Legyen $k = 1$

Ekkor $18 \cdot 9^n < 10 \cdot 10^n - 1$ igaz minden $n \geqslant 5$ esetén.

Így $9 \cdot 2\,(K + 1)^n < 10 \cdot 10^n - 10 + 9K$ és ebből következik (3) alapján, hogy $F(A) < A$.

$k = 2$ esetén

$9 \cdot \frac{3}{2}(K + 1)^n < 10 \cdot 10^n - 1 \quad (n \geqslant 5)$ egyenlőtlenségből

a $k = 1$ esethez hasonlóan következik, hogy $F(A) < A$.

A fentiekhez hasonlóan látható be minden $3 \leqslant k < 9$ esetén, hogy $F(A) < A$.

Tehát $d = 1$ esetén megállapíthatjuk, hogy a (2) sorozatnál valamely i-re $A_i = A_j$ $(j < i)$ teljesül, azaz az $A_j, A_{j+1}, \ldots A_{i-1}$ tagok ismétlődnek. Megkapjuk a különböző ciklusokat, ha az $A < 10^6$ számokból kiinduló sorozatokat vizsgáljuk. Számítógéppel az $A < 10^6$ számokból kiindulva a 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 elemekből álló 9 elemű ciklust és a 18-at mint 1 elemű ciklust találtuk.

4. Számítógéppel megvizsgáltuk a $d = 2$ esetet $A = 0$-tól $A = 10\,000$-ig és csak az alábbi ciklusokat találtuk:
egyelemű ciklusok: 12,
24,
35,
56,
kételemű ciklus: 11, 9,
három elemű ciklus: 8, 10, 6
Érdekességként megjegyezzük, hogy az összes talált ciklus már az $0 \leqslant A \leqslant 56$ intervallumban megvolt.

5. Megvizsgáltuk számítógéppel a következő eseteket is.
$d = 3$-nál $A \leqslant 1000$ esetekben egy
kételemű ciklust: 693, 648 és
egy tízelemű ciklust: 100, 36, 54, 56, 72, 50, 24, 35, 48, 77 találtunk.
$d = 4$-nél $A \leqslant 1000$-nél
két egyelemű ciklus: 120,
315
egy kételemű ciklus: 1440, 1280
egy ötelemű ciklus: 130, 140, 160, 200, 96
egy tizenhat elemű ciklus: 180, 240, 192, 390, 364, 560, 360, 280, 288, 864, 960, 520, 216, 300, 112, 150 adódott.
Futott a program $54\,178 \leqslant A \leqslant 54\,313$ esetén is.
Ekkor egy kételemű ciklus: 15 840, 17 280 és
egy háromelemű: 2688, 8640, 3840 adódott.

$d = 5$-nél $A \leqslant 1000$ esetén
hét egyelemű ciklus: 450
1 500
3 920
50
210
780
16 500,
egy háromelemű ciklus: 1600, 1650, 330,
két négyelemű ciklus: 16 800, 21 450, 18 900, 27 300
és 67 760, 87 120, 32 760, 36 960 adódott.

$d = 6$-nál csak $A = 276$-ig vizsgáltuk a kérdést.

Ekkor 4 egyelemű ciklust: 4 320

840

90

60 480,

egy kételemű ciklust: 9360, 9720, valamint egy

ötelemű ciklust találtunk: 61 152, 51 744, 100 100, 63 504, 71 280

$d = 7$ és $d = 8$ esetnél a 2 sorozat elemeire néhány elem esetén $A_i > 10^6$ teljesült.

$A < 124$-ből indulva nem találtunk ciklust, melynek minden eleme $A_i > 10^6$.

Összefoglalva: azt sejtjük, hogy $d \leq 3$ esetén a különböző ciklusok száma véges, melyeket a $d = 0$ és $d = 1$ esetén meg is találtunk. Valószínű, hogy $d = 2$ és $d = 3$ esetén is csak az általunk talált ciklusok vannak.

Úgy gondoljuk, hogy $d = 4$ és $d = 5$ esetén a (2) sorozat ciklikus, de a különböző ciklusok száma végtelen.

$d \geq 6$ esetén úgy tűnik, hogy végtelen sok A esetén a (2) sorozat divergens.

A számításokat az Egri Ho Si Minh Tanárképző Főiskola ODRA 1204-es számítógépével végeztük.

IRODALOM

[1] *G. D. Poole:* Integers and the sum of the factorials of their digits (Math. Mag 44, 1971, 278–79).

[2] *H. Steinhaus:* One handred problems in elementary mathematias (Pergamon Press, L. T. D. Oxford 1963, p. 11–12, 55–58.)

[3] *K. Iseki:* A problem of Number Theory (Prvc. Japan Acad., 36, (1960), p. 578–83.)

[4] *K. Chikawa, K. Iseki* and *T. Kusakabe:* On a problem by H. Steinhaus (Acta Arithm., VII, 1962, p. 251–252.)

[5] *K. Chikawa, K. Iseki, T. Kusakabe* and *K. Shibamura:* Computation of cyclic parts of Steinhaus problem for power 5 (Acta Arithm. VII, 1962, p 253–254.)

[6] *E. T. Avanesov, V. A. Gusev:* A certani problem of Steinhaus (Mat. Casopis Sloven. Akad., Vied 21, 1971., p. 29–31.)

[7] *Kiss Péter:* Néhány számelméleti probléma vizsgálata számítógéppel. (Az egri Ho Si Minh Tanárképző Főiskola Tudományos Közleménye XIII. 1975. p. 379–381.)

[8] *Kiss Péter:* Egy számelméleti probléma általánosítása (Matematikai lapok. 25. évf. 1–2. szám, p. 145–149.)

ANALYSIS OF THE SOLUTION OF A NUMBER THEORY WITH COMPUTER

JÓZSEF KONCZ

Let $A = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0}$ be a given number in a decimal number system.
Let us interpret the following function $F(\mathrm{A}) = (a_n + d) \cdot (a_{n-1} + d) \ldots (a_0 + d)$ where d is not a negative round figure. Let $A_1 = F(A), A_2 = F(A_1), \ldots$
So we receive the $A, A_1\ A_2 \ldots$ sequence.

Pal Erdos raised the question whether $A, A_1, A_2 \ldots$ sequence d value is not divergent at different d values and is it not divergent at each A natural number, or rather the sequence at what d is cyclical setting out from an optional A, as well as whether the different cycles can be defined.

We have demonstrated that the sequence in the case of $d = 10$ is divergent to each A. We have stated that when $d = 0$ and $d = 1$ the sequence is cyclical setting out from any A and in these cases we have defined the cycles with the help of computer. We suspect that in that case when $d = 2$ and $d = 3$ the number of the different cycles is limited and only the cycles found by us exist. We think in the case of $d = 4$ and $d = 5$ the sequence is cyclical, but the number of different cycles is infinite. It seems to us that in the case of $d=6$ the sequence is divergent setting out from any optional A.