MEGJEGYZÉSEK A VALÓS FÜGGVÉNYEK ITERÁLÁSÁHOZ I.

Dr. SZEPESSY BÁLINT

(Közlésre érkezett: 1979. január 4.)

1. Bevezetés

A valós függvények iterációelmélete még csak kezdeti fejlődési szakaszában van. A témához kapcsolódó dolgozatok eleinte gyakorlati jellegű problémák megoldásával (ugyanis az iterációs eljárások a gyakorlatban hamar alkalmazást nyertek), később speciális elméleti kérdések tisztázásával foglalkoztak.

Az első tágabb alapú rendszerező dolgozat Barna Béla professzortól jelent meg ([1], [2], [3]). Ő – az addig követett lokális vizsgálatokon túl – egy olyan véges szakaszban értelmezett folytonos függvény iterálásával foglalkozik, amely a szakaszt önmagára képezi le. A szerző az elmélet felépítését a klasszikus analízis módszereivel végzi el és nem mondható, hogy elnyerte a teljességet.

Mostanában – az említett dolgozat kapcsán is – növekedett azoknak a száma, akik a valós függvények iterációjának elméletével foglalkoznak, egyre több kérdést tisztáznak, de még így is sok probléma megoldása lenne kívánatos, igaz, hogy ezek a gyakorlatban nemigen okoznak nehézségeket, főként ha „gyakorlaton" a korszerű számolási eljárásokban való alkalmazásokat értjük.

Ebben a dolgozatban véges szakaszt önmagára leképező folytonos függvény esetén a következő kérdést vizsgáljuk: Milyen iterációs alapfüggvény esetén van bármilyen magas rendű ciklus? Ez a kérdés az elmélet szempontjából érdekes és tudomásunk szerint nem tisztázott. A dolgozat bizonyos feltételek mellett választ ad a felvetett kérdésre, de nem jelenti a probléma lezárását.

2. Alapfogalmak

Legyen $f(x)$ az $[a, b]$ $(a < b)$ zárt intervallumban értelmezett olyan egyértékű valós függvény, amely eleget tesz a következő feltételeknek.

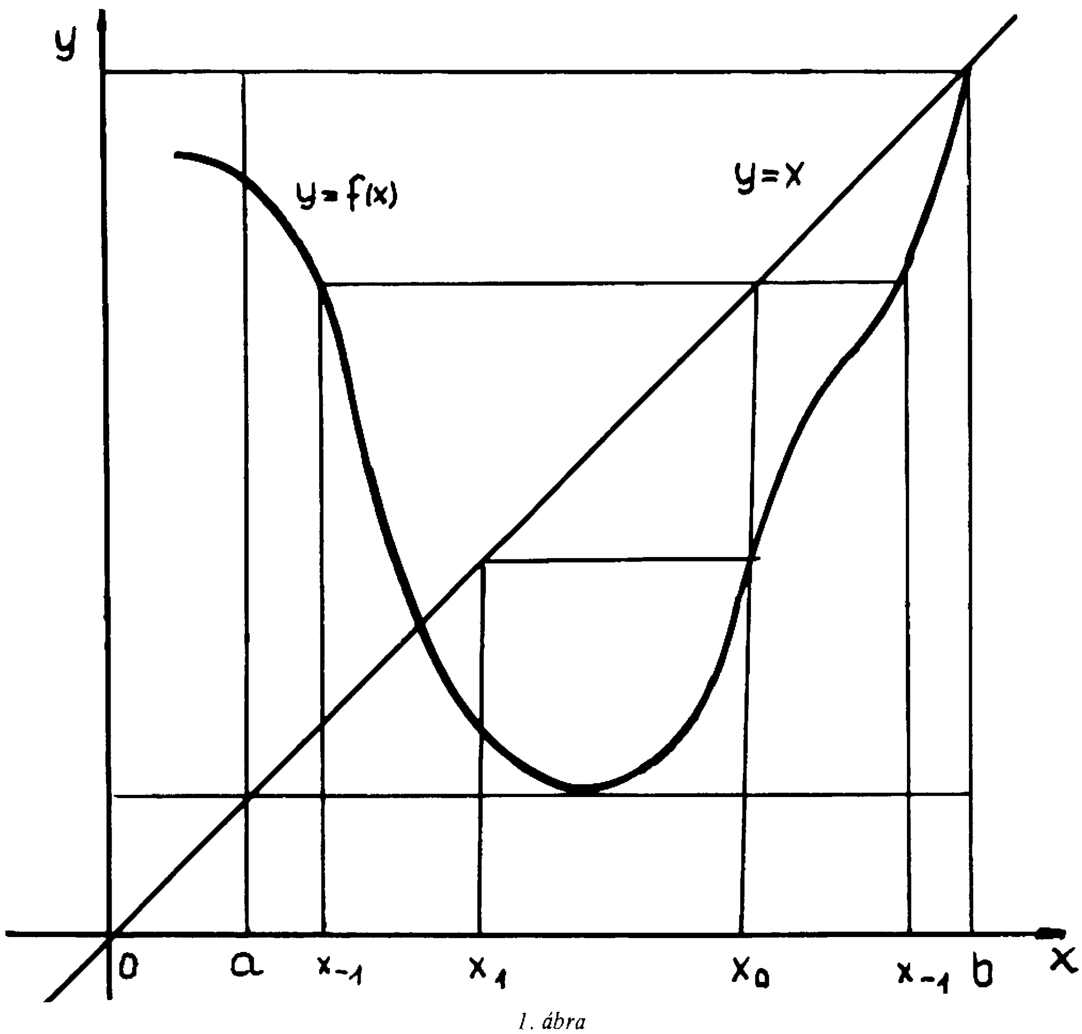
1. $f(x)$ az adott szakasz minden belső pontjában folytonos, a kezdő- és végpontban jobbról, illetve balról folytonos;
2. $f(x)$ az $[a, b]$ intervallumot önmagára képezi le;
3. nincs olyan részintervalluma az adott szakasznak, amelyben $f(x)$ = constans teljesül.

Az $f(x)$ függvényt iterációs alapfüggvénynek nevezzük az adott intervallumon. Az $f_0(x) = x$, $f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = f[f(x)]$, . . ., $f_n(x) = f[f_{n-1}(x)]$ . . . függvényeket az $f(x)$ függvény 0-dik, első, második, . . . n-edik (n-edrendű) . . . iterált függvényeinek (iteráltjainak) nevezzük. Teljesülnek az $f_{n+m}(x) = f_n[f_m(x)] = f_m[f_n(x)]$ azonosságok. A fenti feltételekből következik, hogy az $f_n(x)$ (n = 2, 3, 4, . . .) függvények is mind rendelkeznek az 1., 2. és 3. tulajdonságokkal. Ezért bármely $x_0(\epsilon[a, b)]$ pontnak létezik az $x_{n+1} + f(x_n)$ képlettel alkotott $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ iterációs pontsorozata és minden n-re $x_n \epsilon [a, b]$-nak. Az x_n pontot az x_0 pont n-edrendű (n-edik) iteráltjának vagy rákövetkezőjének nevezzük.

Az $f(x)$ görbe grafikus képének alkalmazásával bármely x_0 pont x_1 rákövetkezőjét úgy kaphatjuk meg, hogy az x_0 pontot az abszcisszatengelyre merőlegesen a görbére vetítjük és a vetületen át párhuzamost húzunk az abszcisszatengellyel; ez a párhuzamos az $y = x$ „átlót" az x_1 abszcisszájú pontban metszi. (1. ábra)

Ha az x' pont iterációs pontsorozatának x_0 eleme, akkor az x' pontot az x_0 pont inverz-iteráltjának vagy megelőzőjének nevezzük. Ha n a legkisebb olyan természetes szám, amelyre $f_n(x') = x_0$, akkor n-edrendű vagy n-edik inverz-iteráltról beszélünk. Az ilyen x' pontokat így jelöljük: $x' = x_{-n}$.

Valamely x_0 pont elsőrendű inverz-iteráltját grafikus eljárással úgy kapjuk, hogy az x_0 pontot az abszcisszatengelyre merőlegesen az átlóra vetítjük, és a vetületen párhuzamost húzunk az abszcisszatengellyel; a párhuzamos és az $f(x)$ közös pontjai x_{-1} abszcisszájúak. (1. ábra)



1. ábra

Ha $[c, d] = \mu(c<d)$ az $[a, b]$ szakasz egy részszakasza, akkor pontjainak első iteráltjai is egy szakaszt alkotnak; jele μ_1. A μ szakasz n-edik iteráltján a $\mu_n = (\mu_{n-1})_1$ intervallumot értjük.

Ha $f(c) = c$, akkor a c pontot az $f(x)$ függvény elsőrendű fixpontjának nevezzük. Ha $f_n(c) \neq c$, $n = 1, 2, \ldots, r-1$ esetén, de $f_r(c) = c$, akkor c az $f(x)$ függvény r-edrendű fixpontja. Ekkor $c_1, c_2, \ldots, c_{r-1}, c_r$ pontok is páronként különböző r-edrendű fixpontok, a $c_1, c_2, \ldots, c_{r-1}$, c fixpontok egy r-edrendű ciklust alkotnak. Ennek elemei konjugált fixpontok. A c pont iterációs pontsorozata a ciklus periodikus ismétlődésével áll elő és csak r számú különböző pontot tartalmaz. Az n-edrendű fixpontok az $y = f_n(x)$ görbe és az átló metszéspontjainak vetületei az abszcisszatengelyen.

Ha x_0 pont iterációs pontsorozatának c a határértéke, akkor c elsőrendű fixpont, és azt mondjuk, hogy x_0 pont a c ponthoz tartozik. Valamely x pontot konvergenciapontnak nevezünk, ha iterációs pontsorozata konvergens, ellenkező esetben x divergenciapont.

Azt mondjuk, hogy a c elsőrendű fixpont vonzó, ha létezik olyan pozitív E szám, hogy bármely $x\epsilon(c-E, c+E)$ intervallum) esetén x a c ponthoz tartozik. A c elsőrendű fixpont balról-vonzó, ha nem vonzó és létezik olyan pozitív E szám, hogy minden $x\epsilon(c-E, c)$ esetén x a c ponthoz tartozik. Hasonlóképpen értelmezzük a jobbról-vonzó elsőrendű fixpontot. Ezeket közös néven félig vonzó fixpontoknak nevezzük. Taszító egy elsőrendű fixpont, ha saját magán és megelőzőin kívül nincs más hozzá tartozó pont. Az olyan elsőrendű fixpontokat, amelyek nem sorolhatók az előbbi csoportok egyikébe sem, vegyes fixpontoknak nevezzük. A magasabb rendű fixpontok értelmezéséből következik, hogy az $f(x)$ függvény r-edrendű fixpontja az $f_r(x)$ függvénynek az elsőrendű fixpontja. Így $f(x)$ függvény r-edrendű fixpontja félig vonzó, vonzó, taszító vagy vegyes aszerint, hogy az $f_r(x)$ függvény c elsőrendű fixpontja melyik típusba tartozik.

Bebizonyítható, hogy bármely magasabb rendű fixpont és konjugáltjai egyazon típusúak. Ezért vonzó, félig vonzó, taszító vagy vegyesnek nevezünk egy ciklust aszerint, hogy fixpontjai milyen típusúak.

Az $[a, b]$ szakasz x_0 pontját szinguláris pontnak nevezzük, ha az x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ végtelen sorozat csak véges számú páronként különböző pontból áll; az x_0 pontot regulárisnak nevezzük, ha iterációs pontsorozata páronként különböző pontokból áll és a pontsorozatnak véges számú torlódási pontja van. Az x_0 pont irreguláris, ha az x_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sorozatnak végtelen sok torlódási pontja van. Az $[a, b]$ szakasz bármely pontja az említett három típus valamelyikébe, de csak egyikébe tartozik. Egy pont megelőzői és rákövetkezői ugyanabban a csoportban vannak, mint maga a pont.

3. A magasabb rendű ciklusokról

Milyen iterációs alapfüggvény esetén van bármilyen magas rendű ciklus? Ez a bevezetőben felvetett kérdés a következőképpen is megfogalmazható: Milyen iterációs alapfüggvény esetén nem lehet a fixpontok (ciklusok) rendszámára felső korlátot adni. Ehhez a kérdéshez kapcsolódik a következő tétel.

Ha az $[a, b]$ szakaszban $f(x)$ az 1., 2., 3. feltételeknek eleget tesz és van két olyan diszjunkt részszakasz, amelyeket a függvény az egész zárt $[a, b]$ szakaszra képez le, akkor: van bármilyen magas rendű ciklus (vagyis a fixpontok rendszáma nem korlátos).

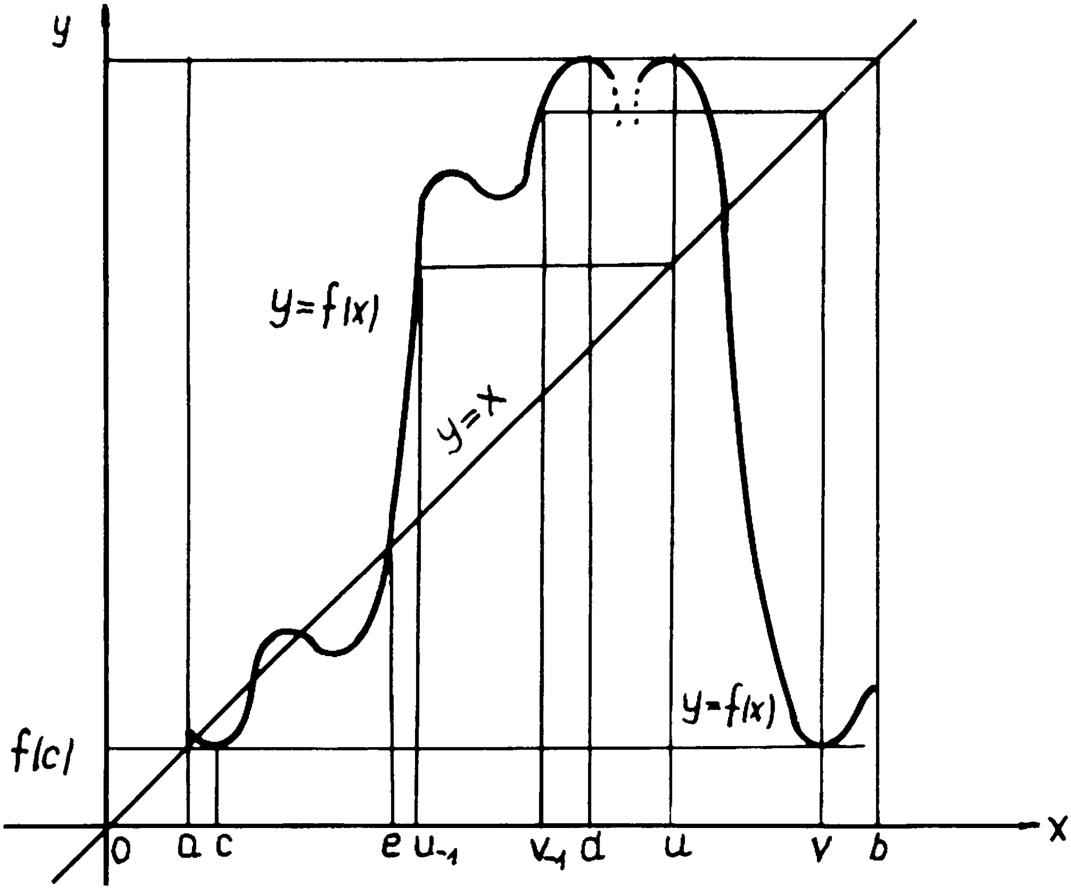
Bizonyítás:

Legyen a feltételekben szereplő két szakasz $[c, d] = \mu$ és $[u, v] = \nu$, $(c < d < u < v)$. Az általánosság korlátozása nélkül feltehető, hogy μ és ν diszjunkt részszakaszoknak nincs olyan valódi része, amelyet $f(x)$ az $[a, b]$ szakaszra képez le. Tehát egyik szakasz sem rövidíthető meg az említett leképezési tulajdonság megtartásával.

Így az $\alpha/$ $f(c) = a$ és akkor $f(d) = b$;
$\beta/$ $f(c) = b$ és akkor $f(d) = a$;
$\gamma/$ $f(u) = b$ és akkor $f(v) = a$;
$\delta/$ $f(u) = a$ és akkor $f(v) = b$

lehetőségeknek megfelelően az α, γ; β, γ; α, δ; β, δ esetpárok az összes lehetséges előfordulásokat kimerítik.

Először az α, γ esetpárral foglalkozunk (2. ábra).



2. ábra

Ekkor van a μ szakaszban olyan e elsőrendű fixpont, amelytől jobbra $f(x) > x$, hacsak $x \leqslant d$, azaz $f(x)$ az $e \leqslant x \leqslant d$ szakaszban minden értéket felvesz e és b között.

Mivel $e < u < v < b$, ezért mind az u mind a v pontnak van az $[e, d]$ szakaszban (legalább egy-egy) inverz-iterált pontja. Tekintsük a v pont $[e, d]$ szakaszbeli inverz-iteráltjai közül azt, amelynek abszcisszája a legkisebb és jelöljük ezt v_{-1}-gyel; tehát $v_{-1} = \min\limits_{e \leqslant x \leqslant d} \{x\}$,

$f(x) = v$. Az u pontnak az $[e, d]$ szakaszbeli inverz-iterált pontjai közül a v_{-1}-től balra a hozzá legközelebb esőt választva legyen ennek abszcisszája u_{-1}; azaz $u_{-1} = \max\limits_{e<x<v_{-1}}\{x\}$, $f(x) = u$.

Könnyű kimutatni, hogy $[u_{-1}; v_{-1}]_1 = [u, v]$. Ez adódik a 3. oldal 2. bekezdéséből; valamint abból az egyszerűen belátható állításból, hogy $[a, b]$ valamely zárt E részszakaszának első iteráltja a $[\min\limits_{x\in E} f(x); \max\limits_{x\in E} f(x)]$ szakasz, továbbá abból, hogy $\min\limits_{x\in v_{-1}} f(x) = f(u_{-1}) = u$ és $\max\limits_{x\in v_{-1}} f(x) = f(v_{-1}) = v$, $(v_{-1} = [u_{-1}, v_{-1}])$.

(Ha a $v_{-1} = [u_{-1}, v_{-1}]$ szakasz belsejében lenne olyan $\bar{x}$ pont, ahol $f(\bar{x}) \leqslant u$ teljesülne, akkor – az $f(x)$ folytonossága miatt – lenne olyan $\hat{x}$ pont is amelyre $f(\hat{x}) = u$ teljesül és $\bar{x} \leqslant \hat{x} < v_{-1}$ lenne ellentétben azzal, hogy $u_{-1} = \max\limits_{e<x<v_{-1}}\{x\}$, $f(x) = u$. Ugyanígy látható be a másik állítás is.)

A v_{-1} értelmezése szerint, $v_{-1} \leqslant d$; $u > d$, így a $v_{-1} < u$, ezért a $v_{-1} = [u_{-1}, v_{-1}]$ szakasz teljes egészében balra van a $v = [u, v]$ szakasztól; $v \cap v_{-1} = \phi$. Ezután képezzük v_{-1} szakasz határpontjaiból kiindulva az előbbi eljárásnak megfelelően a $v_{-2} = \min\limits_{e<x<v_{-1}}\{x\}$, $f(x) = v_{-1}$ és $u_{-2} = \max\limits_{e<x<v_{-2}}\{x\}$, $f(x) = u_{-1}$ határpontú $v_{-2} = [u_{-2}, v_{-2}]$ intervallumot.

Erre teljesül a $(v_{-2})_1 = v_{-1}$. A v_{-1} és a v_{-2} szakaszoknak nincs közös belső pontja, mert ha lenne, akkor e pont rákövetkezője közös belső pontja lenne a $(v_{-2})_1 = v_{-1}$ és a $(v_{-1})_1 = v$ iterált szakaszoknak is, ami az előbbi eredményünkkel ellenkezne.

Így $v_{-1} \cap v_{-2} = \phi$.

Az eljárást az eddigiekhez hasonlóan folytatva olyan $v_{-1}, v_{-2}, \ldots, v_{-n}, \ldots$ végtelen intervallum-sorozatot képezhetünk, amelynek elemei páronként diszjunktak, bármely szakasz a megelőzőjétől balra (ha $n \geqslant 1$), és mindegyik az e ponttól jobbra van. Könnyen belátható, hogy $(v_{-(n+1)})_1 = v_{-n}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Mindezek után elmondhatjuk, hogy – ebben az esetben – a $v_{-n} = [u_{-n}, v_{-n}]$ szakaszban az $f_{n+1}(x)$ iterált függvény minden $[a, b]$ szakaszbeli értéket felvesz, mert a v_{-n} szakasz kezdő, illetve végpontjában:

$$f_{n+1}(u_{-n}) = f[f_n(u_{-n})] = f(u) = b$$
$$f_{n+1}(v_{-n}) = f[f_n(v_{-n})] = f(v) = a$$

Ezért a $g(x) = f_{n+1}(x) - x$ függvényre

$$g(u_{-n}) = f_{n+1}(u_{-n}) - u_{-n} = b - u_{-n} > 0$$
$$g(v_{-n}) = f_{n+1}(v_{-n}) - v_{-n} = a - v_{-n} < 0,$$

valamint $g(x)$ folytonossága következtében van az $[u_{-n}, v_{-n}]$ szakaszban e függvénynek 0-helye, legyen ez $\bar{x}$, tehát $g(\bar{x}) = 0$, azaz $f_{n+1}(\bar{x}) = (\bar{x})$, amiből következik, hogy az $f(x)$ függvénynek az $\bar{x}$ pont legfeljebb (n+1)-edrendű fixpontja. Mivel $\bar{x} \in v_{-n}$, $(\bar{x})_1 \in v_{-(n-1)}$, $(\bar{x})_2 \in v_{-(n-2)}, \ldots, (\bar{x})_{n-1} \in v_{-1}$, $(\bar{x})_n \in v$ és $v_{-n}, v_{-(n-1)}, \ldots, v$ szakaszok – mint azt fentebb megállapítottuk – páronként diszjunktak, ezért az $\bar{x}, (\bar{x})_1, \ldots, (\bar{x})_n$ iterált pontok páronként különbözők, vagyis $\bar{x}$ $(n+1)$-edrendű fixpont. Ezzel ebben az esetben a tételt bebizonyítottuk.

Megjegyzés: Ha a μ és v szakaszoknak egy-egy határpontjuk közös, akkor is igaz (α, γ esetben) a tétel állítása. Ennek belátására az előző bizonyításmód alkalmazható, azt alig módosítja. (Ekkor is képezhető ugyanis az előzőek szerint a $v_{-1}, v_{-2}, \ldots, v_{-n} \ldots$ végtelen intervallum-sorozat és bármely szakasz legfeljebb egy határpont kivételével az előzőtől balra, mindegyik e ponttól jobbra van; $[v_{-(n+1)}]_1 = v_{-n}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

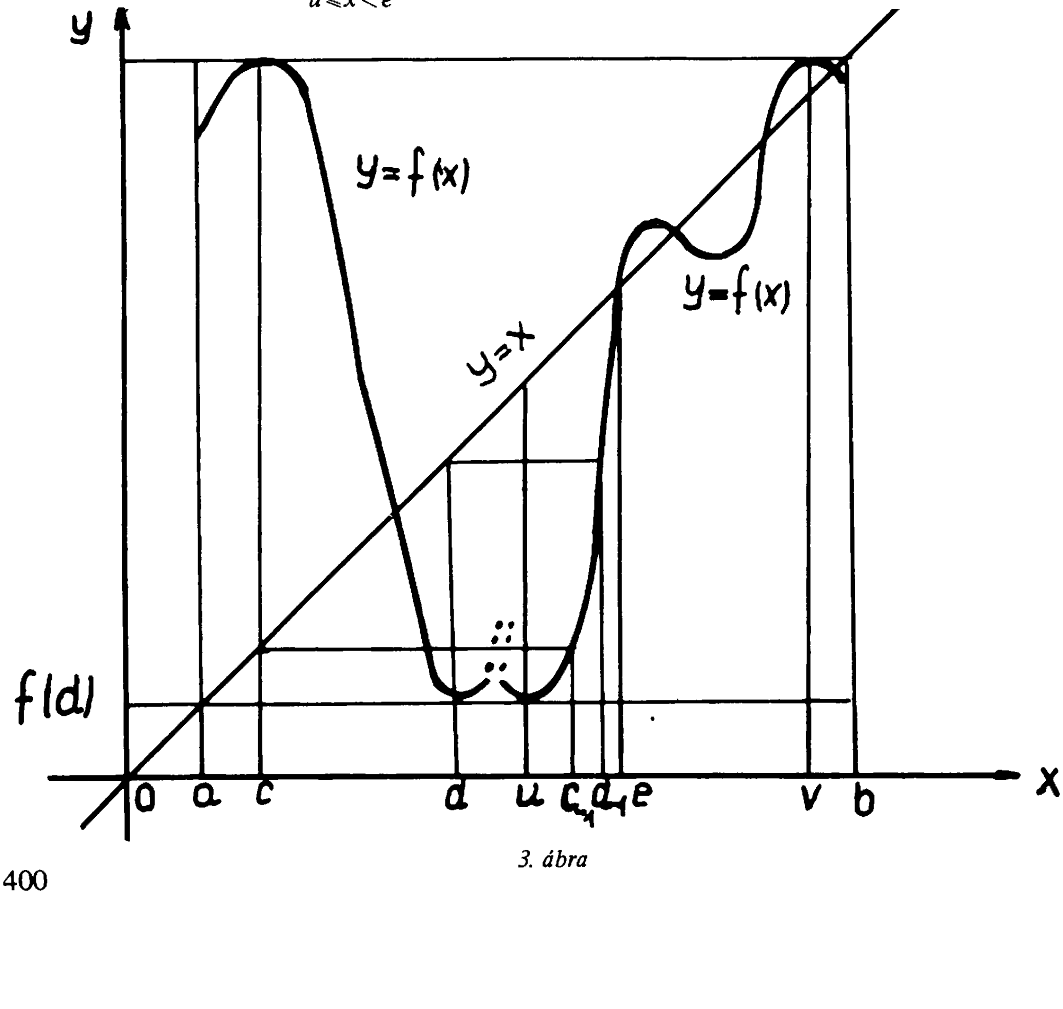
Az $f_{n+1}(x)$ iterált függvény a v_{-n} szakaszbeli bármely $\bar{x}$ elsőrendű fixpontjának (ilyen az előzőek szerint legalább egy van) első, második, . . ., n-edik iteráltja az $[u_{-(n-1)}; v_{-(n-1)}]$, $[u_{-(n-2)}, v_{-(n-2)}], \ldots, [u, v]$ diszjunkt szakaszokba esik; ezért $\bar{x}$ $(n+1)$-edrendű fixpont).

Foglalkozzunk ezután a β, γ esetpárral. A $[c, d] = \mu$ és az $[u, v] = \nu$ szakaszok létezéséből $f(x)$ folytonossága révén következik olyan μ' zárt szakasz létezése a $[d, u]$-szakaszban, amelynek kezdő, illetve végpontjában az iterációs alapfüggvény az a, illetve b értéket veszi fel. Így a μ' és ν két olyan szakasz, amelyre az α, γ esetpárra leírt bizonyításmód közvetlenül alkalmazható.

Az α, δ esetpár is visszavezethető az α, γ esetpárra; ugyanis a $[d, u]$ szakaszban van olyan ν' zárt szakasz, amelynek kezdőpontjában $f(x)$ maximális (b), a végpontjában minimális (a) értékű.
Tehát a ν' és ν szakaszra az α, γ esetpárra leírt bizonyítás alkalmazható.

Ebben az esetben a bizonyítás úgy is elvégezhető, hogy az α, γ esetpárhoz hasonlóan a $[c, d] = \mu$ szakaszban ugyanolyan $\nu_{-1} = [u_{-1}, v_{-1}], \nu_{-2}, \ldots, \nu_{-n}, \ldots$ végtelen intervallum-sorozatot képezünk – az ott leírt módon – amelynek elemei páronként diszjunktak, s amelyekre teljesül, hogy $(\nu_{-(n+1)})_1 = \nu_{-n}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. A $\nu_{-n} = [u_{-n}; v_{-n}]$ szakaszban $f_{n+1}(x)$ iterált függvény minden $[a, b]$ szakaszbeli értéket felvesz, mert $f_{n+1}(u_{-n}) = f(u) = a, f_{n+1}(v_{-n}) = f(v) = b$ és $f_{n+1}(x)$ folytonos, ezért az $f_{n+1}(x) - x = 0$ egyenletnek van megoldása; legyen ez $\bar{x}$. Mivel $(\bar{x})_1 \epsilon \nu_{-(n-1)}, (\bar{x})_2 \epsilon \nu_{-(n-2)}, \ldots (\bar{x})_n \epsilon \nu$, ezért az $\bar{x}$, $(\bar{x})_1$, $(\bar{x})_2, \ldots$ $(\bar{x})_n$ iterált pontok páronként különbözőek, vagyis $\bar{x}$ $(n+1)$-edrendű fixpont.

Végül a β, δ esetpárral foglalkozunk (3. ábra). Ekkor a ν szakaszban van olyan e elsőrendű fixpont, amelytől balra $f(x) < x$, hacsak $x \geqslant u$. Mivel $a \leqslant c < d < e$, ezért mind a c, mind a d pontnak van az $[u, e)$ szakaszban legalább egy inverziterált pontja. Tekintsük a c pont $[u, e)$ szakaszbeli inverz-iteráltjai közül azt, amelynek abszcisszája a legnagyobb és jelöljük ezt c_{-1}-gyel $c_1 = \max\limits_{u \leqslant x < e}(x), f(x) = c$.



3. ábra

A d pontnak az $[u, e)$ szakaszbeli inverz-iterált pontjai közül a c_{-1}-től jobbra a hozzá legközelebb esőt választva legyen ennek abszcisszája d_{-1}; $d_{-1} = \min\limits_{c_{-1}<x<e}\{x\}, f(x) = d$.

Az α, γ esetpárra tett hasonló bizonyítással megmutatható, hogy $[c_{-1}, d_{-1}]_1 = (\mu_{-1})_1 = [c, d] = \mu$. A c_{-1} értelmezése szerint $c_{-1} \geqslant u$, $d < u$, így a $c_{-1} > d$, ezért a μ_{-1} szakasz teljes egészében jobbra van a μ szakasztól; $\mu \cap \mu_{-1} = \phi$. Az előbbiekhez hasonlóan képezzük μ_{-1} határpontjaiból kiindulva a $[c_{-2}, d_{-2}] = \mu_{-2}$ intervallumot. Erre teljesül, hogy $(\mu_{-2})_1 = \mu_{-1}$. A μ_{-2} és μ_{-1} szakaszoknak nincs közös belső pontjuk, mert ellenkező esetben ezek iteráltja közös belső pontja lenne a μ_{-1} és a μ iterált szakaszoknak, ami az előzőekkel ellenkezne.

Az eljárást folytatva olyan végtelen intervallumsorozatot képezhetünk, amelynek elemei páronként diszjunktak; bármely szakasz az előzőtől jobbra $(n \geqslant 1)$ és mindegyik az e ponttól balra van. Az is teljesül, hogy $(\mu_{-(n+1)})_1 = \mu_{-n} (n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Minden $\mu_{-n} = [c_{-n}, d_{-n}]$ szakaszban $f_{n+1}(x)$ iterált függvény minden $[a, b]$ szakaszbeli értéket felvesz, mert μ_{-n} kezdő, illetve végpontjában $f_{n+1}(c_{-n}) = f(c) = b$, illetve $f_{(n+1)}(d_{-n}) = f(d) = a$ és $f_{n+1}(x)$ folytonos, így van a μ_{-n} szakaszban $f_{n+1}(x) - x$ függvények 0-helye; pl. $\bar{x}$. Az α, γ esetpárhoz hasonlóan adódik, hogy $\bar{x} \epsilon \mu_{-n}$, $(\bar{x})_1 \epsilon \mu_{-(n-1)}$ $(\bar{x})_2 \epsilon \mu_{-(n-2)}, \ldots, (\bar{x})_n \epsilon \mu$, és a jobb oldalon szereplő szakaszok páronként diszjunktak ezért $\bar{x}$ pontosan $(n+1)$-edrendű fixpont.

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

A tétel feltételei csak elegendőek bármilyen adott rendű ciklus létezéséhez. Vannak ugyanis olyan iterációs alapfüggvények, amelyeknél a tétel feltételei nem teljesülnek mégis korlátlan a fixpontok rendszáma.

A továbbiakban erre adunk példát.

Ha $f(x)$ az $[a, b]$ szakaszban a tétel feltételei közül csak az 1., 2., 3. feltételeknek tesz eleget és az $[a, d]$ szakaszt $[d = \sup\limits_{a<x<b} x, f(x) = b]$ az egész $[a, b]$ szakaszra, $[d, b]$-t pedig $[h, b]$ szakaszra képezi le, ahol $h \leqslant c_{-1}$, $c_{-1} = \max\limits_{x\epsilon[a, d]}\{x\}, f(x) = c$ és $c = \sup\limits_{x\epsilon[d, b]}\{x\}$ $f(x) = x$, akkor a fixpontok rendszáma nem korlátos.

A bizonyítást $h = c_{-1}$ esetre végezzük el; $h < c_{-1}$ esetén a bizonyítás hasonlóképpen történik.

Tegyük fel először, hogy $f(x)$ a $h = c_{-1}$ értékeket a $[d, b]$ szakaszban két elsőrendű fixpont között veszi fel. (L. 4. ábra.)

Legyen ez az u pont. (Ha több ilyen pont van, akkor bármelyiket tekinthetjük.)

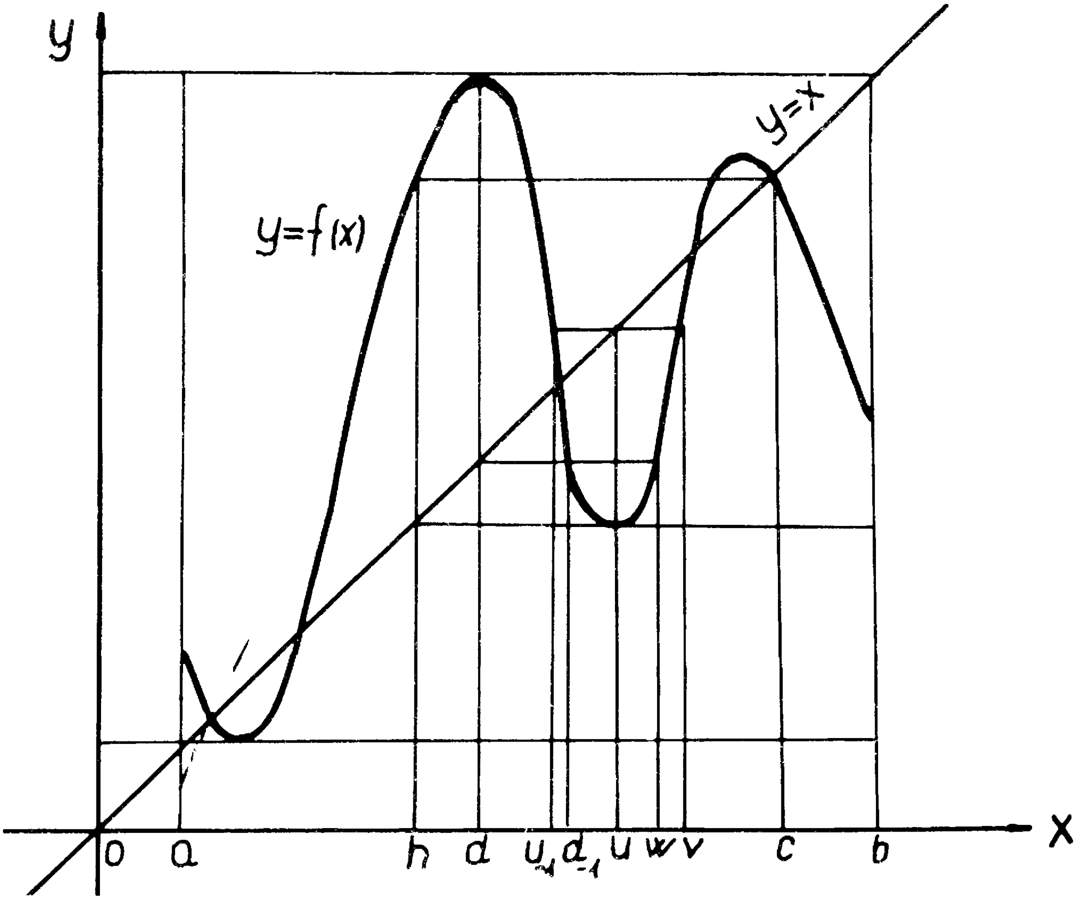
Az 1. feltétel értelmében az $u_{-1} = \min\limits_{x\epsilon[d, u]}\{x\}, f(x) = u$ és $d_{-1} = \min\limits_{x\epsilon[d, u]}\{x\}, f(x) = d$, valamint $v = u_{-1} = \min\limits_{x\epsilon[u, c]}\{x\}, f(x) = u$ és $w = d_{-1} = \min\limits_{x\epsilon[u, c]}\{x\}, f(x) = d$ inverz-iterált pontok léteznek és az $[u_{-1}, d_{-1}]$ valamint $[w, v]$ szakaszok diszjunktak, (vagy egyik határpontjuk közös). Ezeket $f_2(x)$ iterált függvény az egész $[h, b]$ szakaszra képezi le.

A $[h, b]$ szakaszban $f_2(x)$ az 1., 2., 3. feltételeknek eleget tesz és van két olyan diszjunkt részszakasz, amelyeket a függvény az egész $[h, b]$ szakaszra képez le, ezért az előbbi tétel értelmében a fixpontok rendszáma nem korlátos.

Ebben az esetben állításunkat bebizonyítottuk.

Legyen ezután u a $[c, b]$ szakaszban (5. ábra).

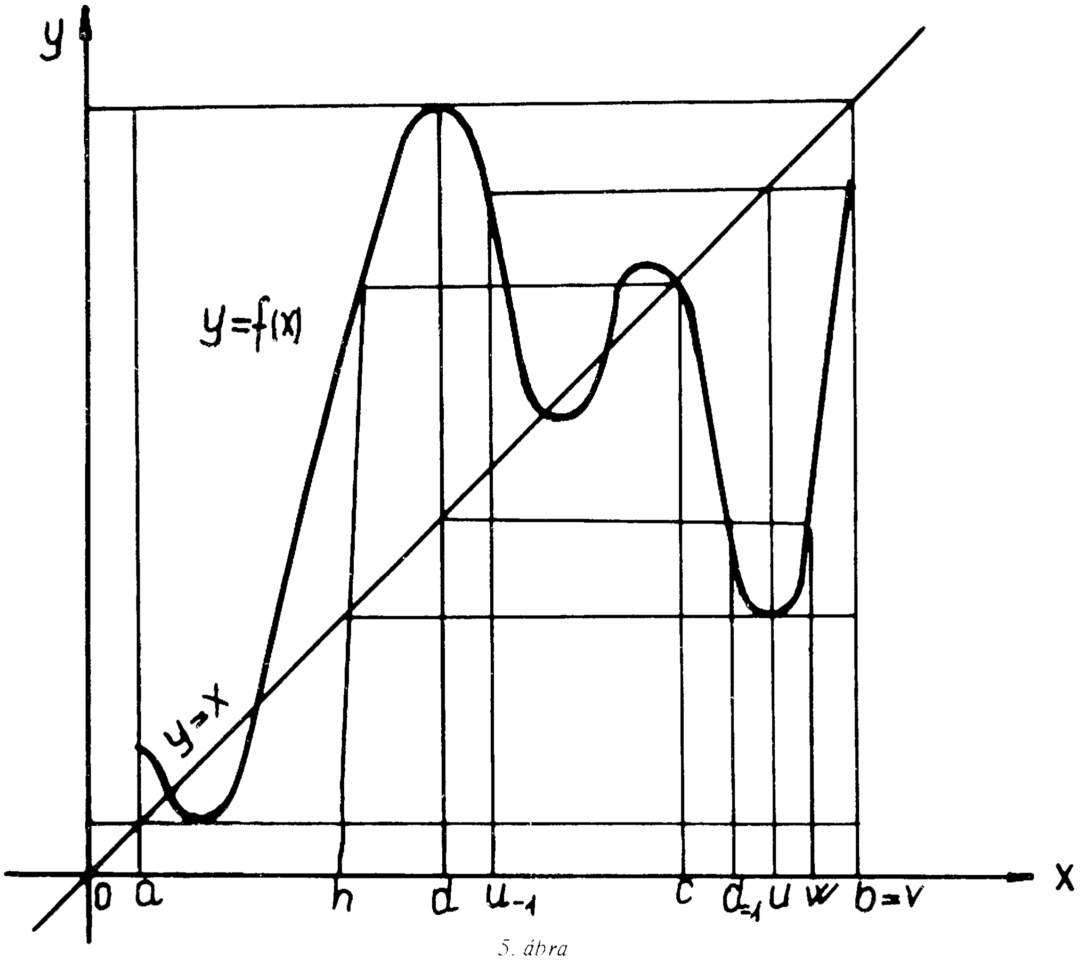
Ha az $[u, b]$ szakaszban van olyan pont, amelyre $f(x) = u$ teljesül (az ábrán ez a b pont), akkor a bizonyítás az előző esethez hasonlóan történhet. Ha az $[u, b]$ szakaszban $f(x)=u$ nem teljesül, akkor állításunkat a következőképpen bizonyíthatjuk.



4. ábra

Legyen $u = \min\limits_{x\in[c,\, b]}\{x\}$, $f(x) = h$ (6. ábra). Mivel $f(x)$ a $[h,\, d]$ szakaszt a $[c,\, b]$ szakaszra képezi le, ezért képezhetjük az $u_{-1} = \min\limits_{x\in[h,\, d]}\{x\}$, $f(x) = u$ inverz-iterált pontot. A $[h, u_{-1}]$ szakaszt $f(x)$ $[c,\, u]$-ra képezi le, így a $[h,\, u_{-1}]$ szakaszban $f_2(x)$ minden $[c,\, u]$ szakaszbeli függvényértéket felvesz, ami $f_2(x)$ folytonossága miatt azt jelenti, hogy ebben a szakaszban az $f_2(x) - x = 0$ egyenlet megoldható. Van tehát legalább egy olyan $\bar{x}$ pont amelyre $f_2(x) = \bar{x}$ igaz. Az $\bar{x}$ legfeljebb másodrendű fixpont. A h és u_{-1} pontok értelmezéséből következik, hogy $\bar{x}$ elsőrendű fixpont nem lehet, ezért pontosan másodrendű fixpont. Mivel $f_2(h) = c$ és $f_2(u_{-1}) = u_1 = h$ $(h < u_{-1})$, ezért a $[h,\, u_{-1}]$ szakaszban létezik az $u_{-3} = \min\limits_{x\in[h,\, u_{-1}]}\{x\}$, $f_2(x) = u_{-1}$ inverz-iterált pont. Az u_{-3} értelmezésből következik, hogy a $[h,\, u_{-1}]$ szakaszban fellépő másodrendű fixpontok mind az $[u_{-3},\, u_{-1}]$ szakaszban vannak. Az $f_4(h) = c$ és $f_4(u_{-3}) = u_1 = h$ miatt a $[h,\, u_{-3}]$ szakaszban $f_4(x) - x = 0$ teljesül, vagyis létezik olyan $\bar{\bar{x}}$ pont, amelyre $f_4(\bar{\bar{x}}) = \bar{\bar{x}}$ igaz. Az $\bar{\bar{x}}$ pont legfeljebb negyedrendű fixpont. Az eddigiek alapján $\bar{\bar{x}}$ első- és másodrendű fixpont nem lehet; így a $[h,\, u_{-1}]$ szakaszban van kettőnél magasabb rendű fixpont.

Bebizonyítjuk, hogy ebben a szakaszban a fixpontok rendszáma (felülről) nem korlátos.



5. ábra

A bizonyítást indirekt úton végezzük.

Tegyük fel állításunkkal ellentétben, hogy a $[h, u_{-1}]$ szakaszban van n-edrendű fixpont ($n \geqslant 2$); de n-nél magasabb rendű már nincs.

Legyen $\hat{x}$ n-edrendű fixpont. A $f_n(h) = c$ és $f_n(\hat{x}) = \hat{x}$ valamint $f_n(x)$ folytonossága miatt képezhetjük az $u_{-(n+1)} = \min\limits_{x \in [h, \hat{x}]} \{x\}$, $f_n(x) = u_{-1}$ inverz-iterált pontot.

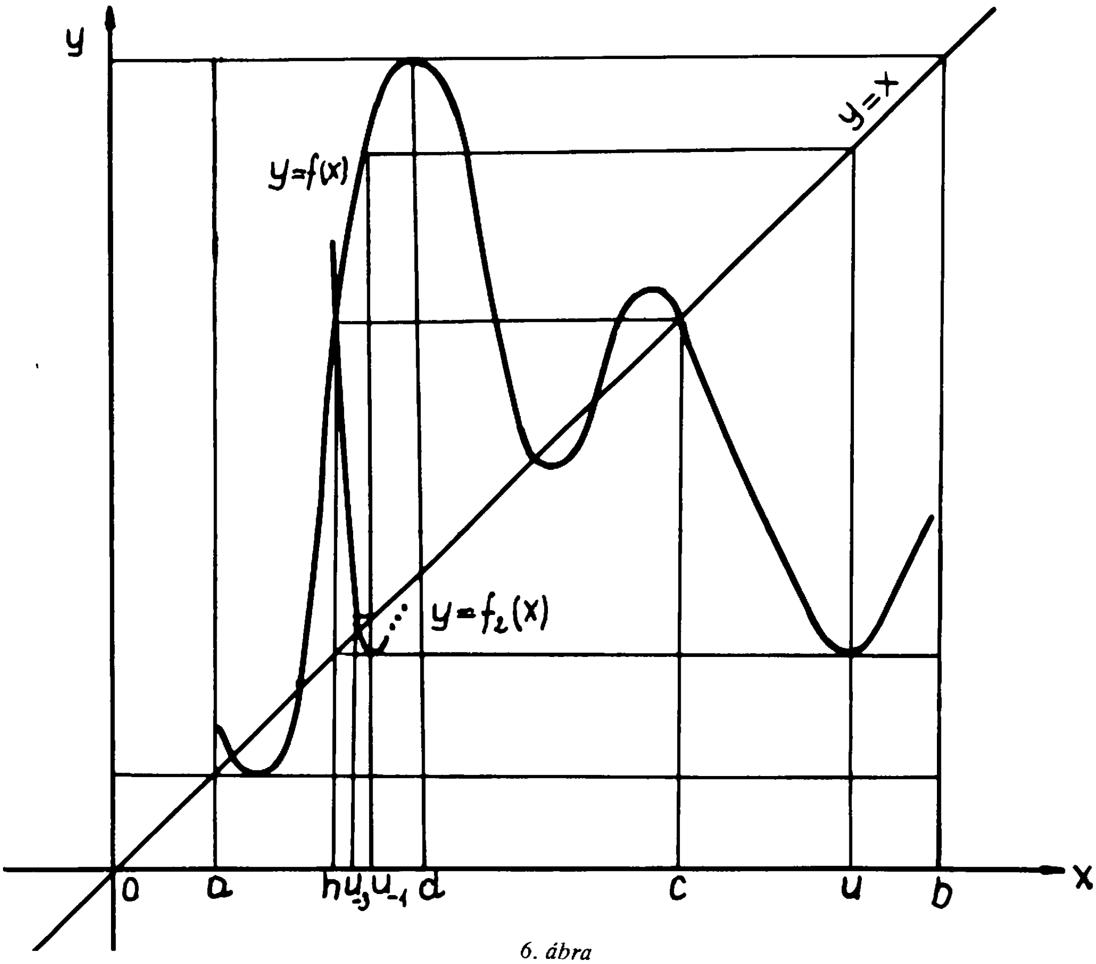
Az $u_{-(n+1)}$ értelmezéséből következik, hogy ($\hat{x}$-re és minden n-edrendű fixpontra igaz) $u_{-(n+1)} \leqslant \hat{x}$.

Az $f_n(x)$ függvény a $[h, u_{-(n+1)}]$ szakaszt az $[u_{-1}; x']$ $(c \leqslant x' < u)$ vagy az $[u_{-1}, x']$, $(u < x' \leqslant b)$ szakaszra képezi le.

Az x' jelenti a legnagyobb függvényértéket, amelyet $f_n(x)$ a $[h, u_{-(n+1)}]$ szakaszban felvesz.

Az első esetben mivel $f_{n+2}(h) = c$ és $f_{n+2}[u_{-(n+1)}] = u_1 = h$, ezért $f_{n+2}(x)$ függvény a $[h, u_{-(n+1)}]$ szakaszban legalább egy pontban átmetszi az átlót. Ebben a szakaszban van tehát olyan $\hat{\hat{x}}$ pont amelyik legfeljebb $(n+2)$-edrendű fixpont. Az $\hat{\hat{x}}$ pont n-edrendű fixpont nem lehet, mert $\hat{\hat{x}} < u_{-(n+1)}$.

Az $\hat{\hat{x}}$ $(n-1)$-edrendű fixpont sem lehet, mert ellenkező esetben az $u_{-n} = \min\limits_{x \in [h, \hat{\hat{x}}]} \{x\}$, $f_{n-1}(x) = u_{-1}$.



6. ábra

Ez azt jelenti, hogy a $[h, u_{-(n+1)}]$ szakaszban $f_{n+1}(x)$ felveszi a h értéket, [mert $f_{n+1}(u_{-n}) = h$]; ami lehetetlen hiszen $x_0 \in [u_{-1}, x']$, $(c \leqslant x' < u)$ esetén $f(x_0) > h$.

Ha feltesszük, hogy $\hat{x}$ $(n-2)$-edrendű fixpont, akkor képezhető az $u_{-(n-1)} = \min\limits_{x \in [h, \hat{x}]} \{x\}$, $f_{n-2}(x) = u_{-1}$ inverz-iterált pont. Így a $[h, \hat{x}]$ szakaszban van olyan pont, amelyre $f_n(x) = u_{-1}$, ez pedig ellentmond $u_{-(n+1)}$ értelmezésének. Az $\hat{x}$ $(n-2)$-edrendű fixpont sem lehet. Hasonlóképpen mutatható meg, hogy $\hat{x}$ nem lehet m-edrendű $(1 \leqslant m \leqslant n-3)$ fixpont sem. Az $x$pont tehát n-nél magasabb rendű fixpont. Ez ellentmond annak a feltevésnek, hogy a $[h, u_{-1}]$ szakaszban nincs n-nél magasabb rendű fixpont. Az ellentmondást feloldva adódik, hogy a fixpontok rendszáma nem korlátos. Ezzel ebben az esetben állításunkat bebizonyítottuk.

Ha $f_n(x)$ függvény a $[h, u_{-(n+1)}]$ szakaszt az $[u_{-1}; x']$ $(u \leqslant x' \leqslant b)$ szakaszra képezi le, akkor az $u_{-n} = \min\limits_{x \in [h, u_{-(n+1)}]} \{x\}$, $f_n(x) = u$ pont létezik és $u_{-n} < u_{-(n+1)}$. Mivel $f_{n+1}(u_{-n}) = u_1 = h$ és $f_{n+1}(h) = c$ és $f_n(x)$ folytonos, ezért a $[h, u_{-n}]$ szakaszban az $f_{n+1}(x) - x = 0$ teljesül. Van tehát ebben a szakaszban legalább egy olyan $\hat{x}$ pont, amelyik legfeljebb $(n+1)$-edrendű fixpont.

Az $\hat{x} < u_{-n} < u_{-(n+1)}$ így $\hat{x}$ n-edrendű fixpont nem lehet. A $\hat{x}$ $(n-1)$-edrendű fixpont sem lehet, mert ellenkező esetben képezhető az $u_{-n} = \min\limits_{x\in[h,\hat{x}]} \{x\}, f_{n-1}(x) = u_{-1}$ inverz-iterált pont, ami ellentmond u_{-n} előbbi értelmezésének.

Az előzőekhez hasonlóan belátható, hogy $\hat{x}$ pontosan $(n+1)$-edrendű fixpont. Ez szintén ellentmond az indirekt feltevésnek.

Ezzel a példa állítását bebizonyítottuk.

BEMERKUNGEN ÜBER DIE ITERATION REELLER FUNKTIONEN

B. SZEPESSY

(Zusammenfassung)

Es sei f(x) eine, in dem geschlossenen Intervall [a, b] definierte und den folgenden Bedingungen, genügende eindeutige reelle Funktion:

1. f(x) ist in jedem inneren Punkte von [a, b], und inden Endepunkten *a* und *b* rechts-, bzW. linksseitig stetig,
2. f(x) bildet den gegebenem Intervall auf sich selbst;
3. es gibt kein Intervall in [a, b], in dem f(x) = const. list.

Die funktion f(x) wird iterative Grundfunktion auf dem gegebenen Intervall genannt; es ist weiter für jedes x:
$f_0(x) = x$, $f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = f[f(x)], \ldots, f_n(x) = f[f_{n-1}(x)]$ hier ist $f_n(x)$ die 0-te, erste, zweite, . . ., n-te Iterierte von f(x). Der Punkt *c* ist ein Fixpunkt erster Ordnung der Funktionen f(x), wenn f(x) = c ist. Gilt $f_n(c) \neq c$, $n = 1, 2, 3, \ldots, r-1$ und $f_r(c) = c$ so ist der Punkt *c* ein Fixpunkt r-ter Ordnung von f(x). Dann sind die Punkte $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_r$ paarweise verschiedene Fixpunkte r-ter Ordnung und die Punkte $c_1, c_2, \ldots, c_r$ bilden einen Zyklus r-ter Ordnung.

Die Grundfrage dieser Arbeit ist: *Bei welcher iterativen Grundfunktion gibt es einen Zyklus mit beliebig hoher Ordnungszahl?*

Wir gewinnen die folgende hinreichende Bedingung: *Wenn es in dem gesehlossenen Intervall [a, b] zwei solche disjunkten Teilintervalle existieren, die auf den ganzen geschlossenen Intervall [a, b] von f(x) abgebildet werden, dann gibt es Zyklus von beliebig hoher Ordnungszhal.*

IRODALOM

[1] B. BARNA, Über die Iteration reeller Funktionen I. *Publ. Math. (Debrecen) 7* (1960), 16–40.
[2] B. BARNA, Über die Iteration reeller Funktionen II. *Publ. Math. (Debrecen) 13* (1966), 169–172.
[3] B. BARNA, Berichtigung zur Arbeit „Über die Iteration reeller Funktionen II" Publ. Math. Debrecen) *20* (1973), 281–282.
[4] L. BERG, (Rostock) Über irreguläre Iterations-folgen *Publ. Mat. (Debrecen) 17.* (1970), 112–115.
[5] A. RALSTON, A first course in numerical analysis (Mc Graw-Hill Inc.), *New York,* 1965.
[6] A. BJÖREK,–G. DAHLQUIST, Numerische Methoden (Oldenburg Verl.) *München–Wien,* 1972.
[7] J. STOER, Einführung in die Numerische Mathematik I. (Springer) *Berlin–Heidelberg–New York,* 1972.