Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Physicae **XXXI** *(2004) 47—55*

A karika gurításának mechanikai elemzése

Kovách Lászlóné

EKF Fizika Tanszék

Abstract. Mechanical analysis of rolling a hoop. The study is about the physical analysis of the characteristic motion-group of hoops, one of the apparatus of rhythmic sportive gymnastics. With the application of physical pinciples it determines the original demands of different straight rollings. It brings about correlation among the angular velocity of the hoop, its angular vlocity and the area. Taking all these into consideration the route of hoop, its time and the distance can be planned.

1. Bevezetés, irodalmi áttekintés

A fizika törvényeinek ismerete, eredményeinek tudatos alkalmazása több tudományág fejlődését gyorsította meg. A mozgások leírásával, okainak feltárásával — mint ismeretes — a mechanika foglalkozik. Így a sporttudomány és a mechanika kapcsolata elvitathatatlan. A fizikai összefüggések figyelembevételével, tudatos alkalmazásával a sportszakemberek optimális edzésterveket, illetve gyakorlatokat állíthatnak össze. Másrészt a sport — az ember és a sportszerek mozgásának kimeríthetetlen variációjával — lehetőséget ad a fizikusnak a mechanika törvényeinek gyakorlatban történő megfigyelésére, a különböző mozgások elemzésekor azok alkalmazására.

Sok neves magyar és külföldi fizikus tanulmányozta — s teszi ezt ma is — az ember mozgását, a sportszerekkel való kapcsolatát, illetve a szerek mozgását. Az emberi test mozgásának elemzése — a mechanika ismeretanyagának és módszereinek felhasználásával, az anatómiára, antropológiára, élettanra támaszkodva — egy új tudományág kialakulásához vezetett. Ez az új tudományág a sportmozgások biomechanikája ([2], [3], [6], [9], [10], [12]).

A sportszerek mozgásának elemzése ugyancsak gazdag irodalommal rendelkezik. A szakirodalomban fellelhető nagyszámú tanulmány foglalkozik a különböző sportágakban szereplő sporteszközök mozgásanalízisével, az optimális kezdőfeltételek meghatározásával ([4], [5], [7], [8], [11]).

A ritmikus sportgimnasztika viszonylag rövid múltra tekint vissza. A kéziszerek mozgatása és mozgása a sportág szigorú szabályai szerint történhet. Ahhoz, hogy egy kéziszer pontosan úgy mozogjon, ahogy azt a sportoló akarja, a fizika által meghatározott lehetőségeket és korlátokat ismerni kell. Dolgozatomban az egyik kéziszer, a karika mozgásának fizikai elemzésével foglalkozom.

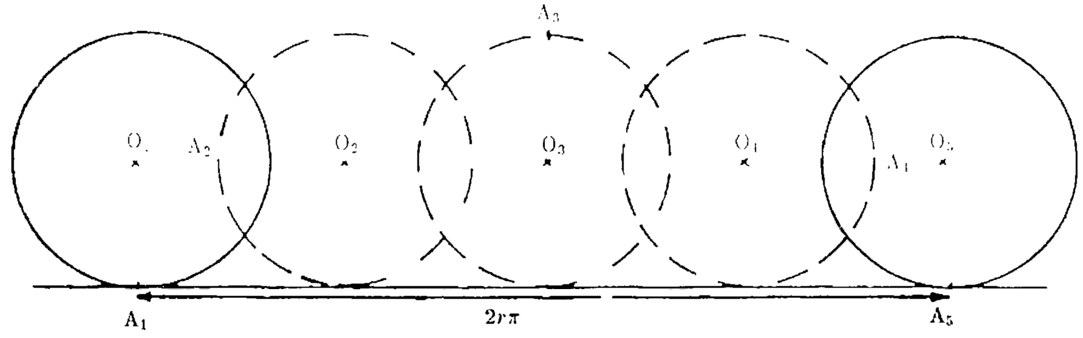
A gyakorlatokban a karika és a sportoló sok esetben külön mozog, például dobáskor, gurításkor, pörgetéskor. A karika pályáját pontosan előre meg kell tervezni. Ez a mozgás mechanikai elemzésével kezdődhet.

2. Problémafelvetés

A karika változatos mozgásai közül vizsgáljuk meg a gurítást. A ritmikus sportgimnasztika szabályosnak fogadja el azt a mozgást, amikor a karika tisztán gördül. Adott fizikai állandók ismeretében milyen kezdeti feltételek esetén jön létre ez a mozgás, mikor gördül egyenes mentén a karika, s milyen kezdőfeltételek kellenek ahhoz, hogy a karika ugyanazon a pályán visszafelé is gördüljön? Miért és mikor lesz a pálya kör? Ezeknek a kérdéseknek a megválaszolásához a forgó mozgás törvényeivel kell tisztában lennünk.

2.1.a. Tisztán gördülés, a karika gurítása

A karikatechnika egyik jellemző csoportja a gurítás. Ez a mozgás a fizikában a tisztán gördülésnek felel meg. Mit is jelent ez a fogalom? A karika mozgása — amely tulajdonképpen forogva haladást jelent — két alapmozgásra bontható: egyrészt egy $\vec{v}_0$ sebességű transzlációra, másrészt egy ω_0 szögsebességű forgásra a tömegközéppont körül. Ha a tornász kezdeti feltételként biztosítani tudja a $v_0 = v_k$ teljesülését, azaz a transzlációs sebesség már indításkor megegyezik — a tömegközéppont körüli forgásból adódó — kerületi sebességgel, a karika tisztán gördül. Nézzük meg a karika helyzetét $\frac{T}{4}$ időközönként, ahol T egy teljes körülfordulás idejét jelenti:



1. ábra

A kiszemelt A pont és O középpont helyzetei az 1. ábra jelöléseivel:

t:	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
A:	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
O:	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5

Tehát a karika T idő alatt $\overline{A_1A_5} = \overline{O_1O_5} = 2r\pi$ utat tett meg, illetve a kerületi pontok a tömegközéppont körül éppen egy teljes kört írtak le. Dolgozatomban a következőkben a vektor nagyságát a vektor betűjelével jelölöm. Például: $|\vec{a}| = a$.

Így a transzlaciós sebesség nagysága:

$$v_0 = \frac{2r\pi}{T}, \tag{1}$$

és

$$v_k = \frac{2r\pi}{T} \tag{2}$$

a kerületi sebesség nagysága. (1) és (2) alapján

$$v_0 = v_k \tag{3}$$

adódik.

2.1.b. Ha a transzlációs sebesség nem egyenlő a karika kerületi sebességével, a karika és a talaj között fellépő súrlódási erő hatására — egy bizonyos idő eltelte után — létrejöhet a kiegyenlítődés.

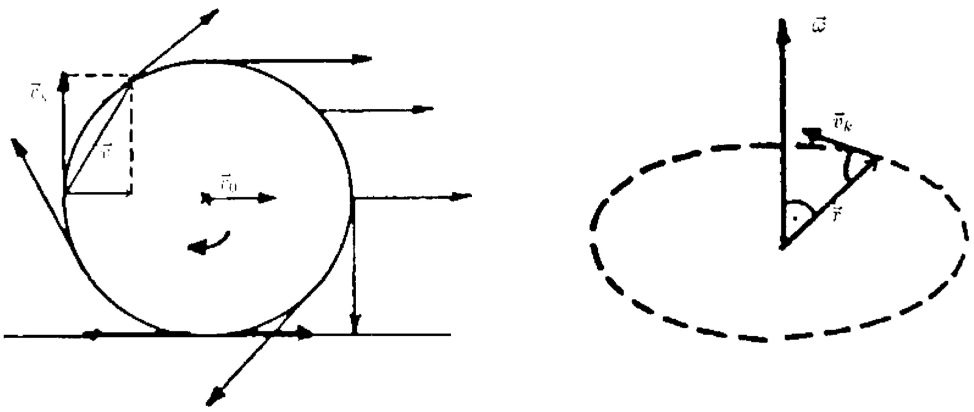
Legyen

$$.v_k > v_0, \tag{4}$$

ahol v_k a kerületi sebesség, v_0 a transzlációs sebesség, tehát $r\omega_0 > v_0$. A karika tetszőleges pontjának a földhöz viszonyított sebessége:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_k, \tag{5}$$

ahol $\vec{v}_0$ a transzlációs sebesség (ezzel a sebességgel mozog a tömegközéppont), $\vec{v}_k = \vec{\omega} \times \vec{r}$ ahol $\vec{\omega}$ a szögsebességvektor, $\vec{r}$ pedig a középpontból az adott pontba mutató vektor. A vektorális szorzat definíciója értelmében $\vec{v}_k$ minden pontban érintő irányú (*2.* és *3. ábra*).



2. és *3. ábra*

A feltétel értelmében a talajjal érintkező A pont talajhoz viszonyított sebessége a $t = 0$ időpillanatban legyen $\vec{v}_A$. (5) alapján $\vec{v}_A = \vec{v}_0 + \vec{v}_k$.

Mivel ebben a pontban $\vec{v}_A$ és $\vec{v}_k$ ellentétes irányúak, így összegük nagysága a két vektor abszolút értékének különbsége, s a (4) feltétel miatt $\vec{v}_k$ irányába mutat:

$$v_A = r\omega_0 - v_0. \tag{6}$$

Mivel $v_A = r\omega_0 - v_0 > 0$, így a súrlódási erő előre mutat. Szerepe: csökkenti a kerületi sebességet, növeli a transzlációs sebességet (*4. ábra*).

A mozgásegyenletek:

$$m\vec{a} = \vec{F}_s \tag{7}$$

a tömegközéppont tétele értelmében, és

$$\theta\vec{\beta} = \vec{M}_s \tag{8}$$

a forgómozgás alapegyenlete a tömegközépponton átmenő, a karika síkjára merőleges tengelyre (t), ahol m a karika tömege, $\vec{a}$ a tömegközéppont gyorsulása, θ a karika tehetetlenségi nyomatéka az t tengelyre, $\vec{F}_s$ a súrlódási erő, $\vec{M}_s$ a súrlódási erő forgatónyomatéka az t tengelyre, $\vec{\beta}$ a szöggyorsulás az t tengelyre.

A gyorsuló, illetve lassuló mozgás addig a t_1 időpillanatig tart, amíg

$$v_0(t_1) = v_k(t_1) \tag{9}$$

be nem következik.

Mivel a

$$v_0(t_1) = v_0 + at_1, \tag{10a}$$

$$v_k(t_1) = r\omega_0 - r\beta t_1 \tag{10b}$$

összefüggésekkel írhatjuk le az egyenletesen változó egyenesvonalú, illetve a körmozgás sebességét az idő függvényében, a (9) feltétel miatt

$$v_0 + at_1 = r\omega_0 - r\beta t_1. \tag{11}$$

Így

$$t_1 = \frac{v_0 - r\omega_0}{a + r\beta}. \tag{12}$$

A (7) és a (8) egyenletből a $\theta = mr^2$, $F_s = \mu mg$ és $M_s = \mu mgr$ helyettesítéssel az

$$a = \mu g, \tag{13}$$

$$\beta = \frac{\mu g}{r} \tag{14}$$

egyszerű kifejezéseket kapjuk a gyorsulás, illetve a szöggyorsulás nagyságára. Ebből az

$$\dot{a_0} = r\beta = a_k \tag{15}$$

összefüggéshez jutunk. Ez azt is jelenti, hogy a kerületi pontok és a tömegközéppont sebességének változása időben azonos.

Így (12)-ből

$$t_1 = \frac{v_0 - r\omega_0}{2\mu g} \tag{16}$$

kifejezést kapjuk az időre.

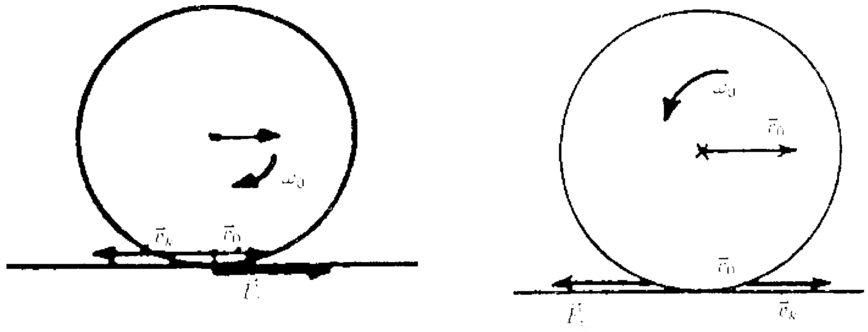
2.2. A karika azonos úton visszatérő gurítása — bumerángmozgása

Az egyenes vonalú gurítások másik nagy csoportja a karika azonos pályán visszatérő mozgása. Ezt röviden bumerángnak nevezik a ritmikus sportgimnasztikában.

Az r sugarú m tömegű karikát a talaj felett ω_0 szögsebességgel visszafelé megforgatva úgy dobja el a sportoló, hogy középpontjának sebessége az eldobás irányában $\vec{v}_0$.

Vizsgáljuk meg, *milyen kezdeti feltételek mellett teljesül, hogy a karika talajra érés utáni mozgása során visszaforduljon*, illetve mekkora ω_0 szögsebességgel érhető el, hogy a visszafelé haladó karika sebessége $\vec{v}_0$ legyen?

A talajra érés pillanatában a karika talajjal érintkező pontjának sebessége (5) alapján: $\vec{v}_A = \vec{v}_0 + \vec{v}_k$.



4. és *5. ábra*

Mivel most a transzlációs és a kerületi sebesség az A pontban azonos irányba mutat, nagyságuk összeadódik:

$$v_A = v_0 + r\omega_0. \tag{17}$$

$\vec{v}_A$ iránya előre mutat, így a súrlódási erő hátrafelé (lásd *5. ábra*). A karika a talajon csúszik. Így fellép az $F_s = \mu mg$ surlódási erő, amely mind a haladó, mind a forgó mozgást fékezi. A mozgásegyenletek (7) és (8) alapján $m\vec{a} = \vec{F}_s$ és $\theta\vec{\beta} = \vec{M}_s$.

Így most is az $a = \mu g$ és $\beta = \frac{\mu g}{r}$ összefüggéseket kapjuk. Most viszont a súrlódási erő mindkét mozgást fékezi, így t idő múlva

$$v_0(t) = v_0 - \mu g t, \tag{18}$$

és

$$\omega_0(t) = \omega_0 - \mu\frac{g}{r}t, \tag{19}$$

ahol $v_0(t)$ a transzlációs sebesség, $\omega_0(t)$ pedig az t tengely körüli forgás szögsebessége.

A visszafordulás feltétele:

(20) $$v_0(t) = 0$$

és

(21) $$\omega_0(t) > 0.$$

Ez abban a t_1 időpillanatban következik be, mikor a transzlációs sebesség egy pillanatra 0 lesz:

(22) $$v_0 - \mu g t_1 = 0, \quad \text{azaz} \quad t_1 = \frac{v_0}{\mu g}.$$

A (21) feltétel miatt (19)-be behelyettesítve:

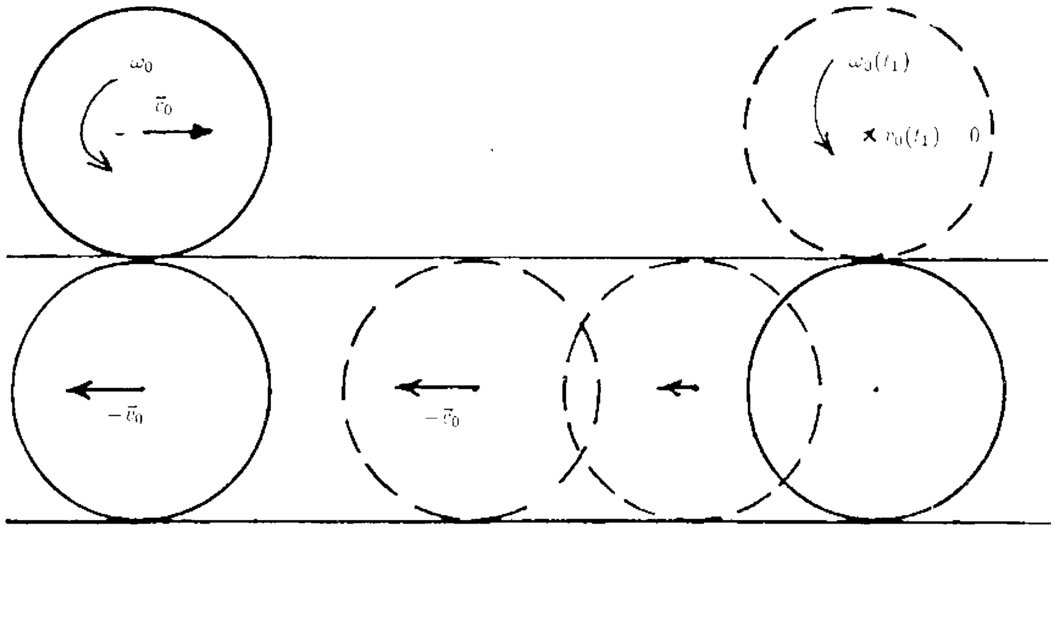
$$\omega_0(t) = \omega_0 - \mu \frac{g}{r} \frac{v_0}{\mu g} > 0.$$

Tehát

(23) $$\omega_0 > \frac{v_0}{r}$$

adja a visszafordulás feltételét.

Vizsgáljuk még meg, milyen kezdeti feltételeknek kell teljesülnie ahhoz, hogy a karika ugyanakkora transzlációs sebességgel érjen vissza a sportolóhoz, mint amilyennel megkezdte mozgását.



6. ábra

Tételezzük fel, hogy visszafordulás után, a kezdettől mért t_2 időpillanatban jön létre a tisztán gördülés.

Ekkor (18) és (19) alapján

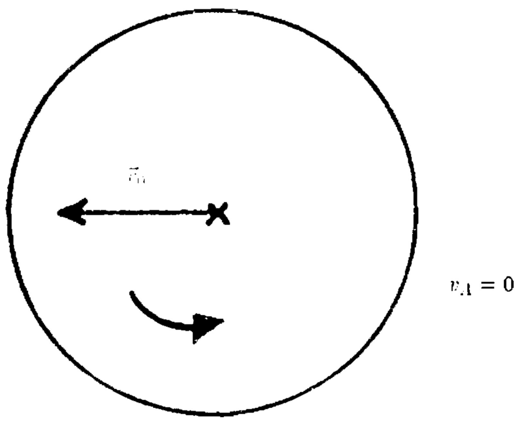
$$v_0(t_2) = v_0 - \mu g t_2,$$

ahol $\vec{v}_0(t_2)$ a transzlációs sebesség nagysága a t_2 időpillanatban, és

$$v_k(t_2) = r\omega_0 - \mu g t_2,$$

ahol $v_k(t_2)$ a kerületi sebesség nagysága a t_2 időpillanatban.

A két vektor ellentétes irányú és azonos nagyságú, így az A pont sebessége 0 (*7. ábra*).



7. ábra

Tehát $v_0(t_2) = v_k(t_2)$, így

(24) $$\mu g t_2 - v_0 = r\omega_0 - \mu g t_2,$$

azaz

(25) $$t_2 = \frac{r\omega_0 + v_0}{2\mu g}.$$

Ha azt akarjuk, hogy $v_0(t_2) = v_0$ legyen, úgy

$$v_0(t) = v_0 - \mu g \frac{r\omega_0 + v_0}{2\mu g} = \frac{v - r\omega_0}{2}$$

miatt

$$\frac{r\omega_0 - v_0}{2} = v_0.$$

Ez az $\omega_0 = 3\frac{v_0}{r}$ kezdeti feltétel teljesülését jelenti.

3. Összegzés

Ha a karika mozgását előre kívánjuk meghatározni, a kezdeti feltételeket biztosítani kell. A sportolónak fontos, hogy a gyakorlat során a karika mindig a meghatározott pályán, lehetőleg azonos ideig önállóan mozogjon. Úgy gondolom, az egzakt összefüggések ismeretében tudatosan tervezhető a kéziszer mozgása, s a felmerülő hibák kiküszöbölhetők.

A ritmikus sportgimnasztika csupán egyetlen kéziszerének — a karikának — legalapvetőbb mozgását, a talajon történő gurítását vizsgáltam. Még ennek az egyetlen szernek a mozgása is rengeteg tisztáznivalót kínál a fizikus számára. A mozgások mechanikai analízisével kapott konkrét összefüggések ismerete segítséget nyújthat a gyakorlatok tervezésekor e sportág szakembereinek.

Irodalom

[1] ABÁDNÉ HAUZER H.: Ritmikus sportgimnasztika. Sport, Budapest, 1978.
[2] BARABÁS A.—FÁBIÁN GY.: A testnevelés- és sporttudományos kísérletek tervezése. TF., Budapest, 1980.
[3] BARTON J.: Biomechanika. Tankönyvkiadó, Budapest, 1984.
[4] BUDÓ Á.: Kísérleti fizika I. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.
[5] HORVÁTH P.—JUHÁSZ G.—TASNÁDI P.: Mindennapok fizikája. ELTE, TTK, Budapest, 1991.
[6] NIESE, G.: Fizika a mindennapi életben. Gondolat, Budapest, 1964.
[7] PÁRKÁNYI L.: Mechanika I. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.
[8] SAS E.: Beszélgetések a fizikáról. Gondolat, Budapest, 1976.
[9] SZÉCSÉNYINÉ FEKETE I.: Ritmikus sportgimnasztika alapforgásainak biomechanikai elemzése és oktatásának néhány elvi szempontja. Budapest, TF, 1984. Doktori értekezés.
[10] TIHANYI J.: Az erőedzés élettani és mechanikai alapelvei. Atlétika, 1985. 6. 11—16.
[11] TOWNEND, M. S.: Mathematics is sport. Horwood Ltd. New York, 1984.
[12] WINDELBAND, A.: Bezüge zwischen biologischen und physikalischen Erscheinungen und Besetzmassigkeiten Physik in der Schule, 1992.