AZ APPENDIX NÉHÁNY PARAGRAFUSÁNAK VIZSGÁLATA A MARADÉK AXIOMARENDSZER ALAPJÁN

Dr. PELLE BÉLA

I.

Ebben a dolgozatban Bolyai Appendixének néhány paragrafusát dolgozzuk fel a maradék axiómarendszer alapján.

Bolyai az egyes paragrafusokban azokat a tételeket dolgozza ki, amelyeket valamilyen formában felhasznál a későbbi tételek bizonyításában. A megjegyzéseiből és ahogyan az egyes tételeket felhasználja az következik, hogy ezek kidolgozása általánosabban is meg volt. Ő abból csupán azt emelte ki és tette közzé, amely a felhasználandó tételt legtömörebben tartalmazza. Mi, e néhány idézett paragrafus során azt mutatjuk be, hogy mennyivel szélesebb területet ölel az fel, és hogy az egyes tételek a maradék axiómarendszer alapján levezethető tételek speciális eseteiként említhetők, vagyis ezek a Geometria alapjaiban a maradék axiómarendszer alapján kidolgozott tételek rendszerébe helyezhetők.

II.

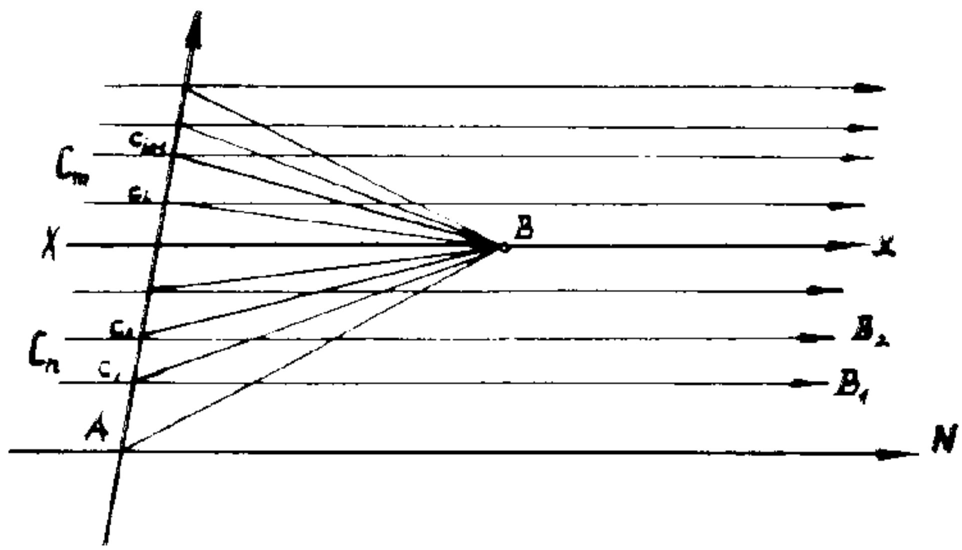
Bolyai a 4. §-ban a következő tételt bizonyítja: „Ha MAN $\sphericalangle$ > MAB $\sphericalangle$, akkor az AB^{+}* minden B pontjához megadható olyan C pont az AM^{+}-en, hogy BCM $\sphericalangle$ = NAM $\sphericalangle$." E tételt ilyen megfogalmazásban a későbbiek során nem használja fel, hanem — mondhatnánk — ennek egy következményét alkalmazza az 5. §-ban. E tétel nem kívánja meg a párhuzamosság értelmezését. Bolyai azért tárgyalja itt, mert a szigorú logikus felépítése során szüksége van rá — ha nem is az eredeti megfogalmazásban — az 5. §-ban. E tétel helyett a következő általánosabb tétel is kimondható és bizonyítható a maradék axiómarendszer alapján:

4. 1. tétel: Az MAN $\sphericalangle$-höz az AM egyenes kijelölt oldalának bármely B-pontján át egy és csak egy olyan félsugár tartozik, hogy

* Megjegyzés: A +-jel félegyenest jelöl. Pl.: AB^{+} = AB félegyenes.

MAN $\sphericalangle \equiv$ MXB $\sphericalangle$. (E tétel a III_4 axióma megfordításának is tekinthető.)

Bizonyítás: Először kimutatjuk, hogy legfeljebb egy félegyenes illeszkedik B-re. A III_4 axióma szerint az AM egyenes C_i pontjaiból kiinduló C_iM-hez egy és csak egy félsugár tartozik, amellyel képezett szögek egybevágók MAN $\sphericalangle$ gel. Mivel MAN $\sphericalangle \equiv MC_1B_1 \sphericalangle$, így a következő tétel szerint: „Ha egy g egyenes két a és b egyenest egybevágó megfelelő és akkor egybevágó váltó szögek alatt metszi, ez esetben a- és b-nek nincs közös pontja." (Varga Ottó: A geometria alapjai 72. tétel) AN^+ és $C_1B_1^+$ nem metsző egyenesek. Továbbá MAN $\sphericalangle \equiv MC_2B_2 \sphericalangle$-ből AN^+ és $C_2B_2^+$ nem metszők. De akkor $C_1B_1^+$ és $C_2B_2^+$ sem metszi egymást. Ugyanis ha egy közös B pontban metszenék, akkor a BC_1C_2 háromszögből az MC_2B külső szög egybevágó lenne az MC_1B belső szöggel. Ez pedig ellentmond a következő tételnek: „Egy háromszög bármilyen külső szöge nagyobb a háromszög azon szögeinél, amely nem mellékszöge." (Uo. 79. tétel.) E tranzitív vonatkozásából következik, hogy a $C_iB_i^+$ szögszárak nem metszik egymást. Ezek szerint az AM egyenes kijelölt oldalának bármely B pontjához legfeljebb egy egyenes illeszkedik úgy, hogy MAN $\sphericalangle \equiv$ MXB $\sphericalangle$.



1. ábra

Tegyük fel, hogy van olyan B pont, amelyre a $C_iB_i^+$-k egyike sem illeszkedik. Tekintsük azokat a C_i pontokat, amelyekhez tartozó $MC_iB \sphericalangle <$ MAN $\sphericalangle$, továbbá azokat, amelyekhez tartozó $MC_iB \sphericalangle >$ MAN $\sphericalangle$. A B-ből kiinduló és az első csoporthoz tartozó félsugarakat jelöljük a_k-val, a másodikhoz tartozókat b_k-val. A Cantor-axiómának megfelelő szögmetrikai tétel szerint (uo. 151. tétel) létezik egy B ponton átmenő x félsugár, amely az összes $(a_k\ b_k)$ belsejében fekszik és x egymástól elválasztja az a_k és b_k félsugarakat. Így MXB $\sphericalangle$ nem lehet nagyobb MAN $\sphericalangle$-nél, mert akkor x b_k-hoz tartozik, de kisebb sem, mert akkor a_k-hoz tartozik. Mivel pedig az egybevágó, kisebb, nagyobb relációk közül egyik és csak az egyik állhat fenn (uo. 58. tétel), $MXB \sphericalangle \equiv MAN \sphericalangle$, tehát B-re is illeszkedik egy szögszár a feltétellel ellentétben.

Ezzel bebizonyítottuk a következő tételeket is:

4. 2. tétel: A B-re illeszkedő x félsugár elválasztja a C_n-re illeszkedő párhuzamos félsugarakat a C_m-re illeszkedő párhuzamos félsugaraktól, ahol $MC_m B \sphericalangle > MXB \sphericalangle > MC_n B \sphericalangle$.

4. 3. tétel: Nincs olyan $BC_n M$ szögnél nagyobb és $BC_m M$ szögnél kisebb szög, amellyel a $BXM \sphericalangle$ ne válna egyszer egyenlővé.

4. 4. tétel: Az AM egyenesen D felvehető úgy, hogy $BDM \sphericalangle > NAM \sphericalangle$.

Bizonyítás: A 4. 1. szerint B-re egy és csak egy olyan félsugár illeszthető, hogy $MXB \sphericalangle \equiv MAN \sphericalangle$. Az XM^+ félegyenes D pontjaira $MDB \sphericalangle > MXB \sphericalangle$, feltéve, hogy $|XD| < |XM|$. A következő tétel alapján: — „Ha $\sphericalangle (a'b') < \sphericalangle (c'd')$ és $\sphericalangle (c'd') \equiv \sphericalangle (e'f')$, akkor $\sphericalangle (a'b') < \sphericalangle (e'f')$." (u. o. 59. tétel.) — $MXB \sphericalangle < MDB \sphericalangle$ és $MXB \sphericalangle \equiv MAN \sphericalangle$-ből következik, hogy $MAN \sphericalangle < MDB \sphericalangle$.

Ezen tételek közül Bolyai a 4. 3. tételt használja fel az 5. §-ban. Az 5. § tétele a következő:

Ha $BN^+ \parallel AM^+$, akkor az AM egyenesen van olyan F pont, amelyre nézve $F \sphericalangle \equiv B \sphericalangle$. E tétel a 4. §-ban idézett tétel mellőzésével is bizonyítható. Sőt helyette a következő általánosabb tételt mondhatjuk ki:

5. 1. tétel: Ha $BN^+ \parallel AM^+$, akkor az AM egyenesen egy és csak egy olyan F pont van, amelyre nézve $FBN \sphericalangle \equiv BFM \sphericalangle$.

Bizonyítás: A maradék axiómarendszer alapján bizonyított tétel (uo. 105. tétel), hogy a BN és AM nem metsző egyenespárnál BN minden pontjához AM-en legfeljebb egy korrespondeáló pont létezik. Továbbá bizonyított a következő is (uo. 107. tételben): az egymást nem metsző egyenespárra BN tetszőleges B pontjához AM-en van korrespondáló F pont. Ezek szerint: Két nem metsző egyenespáron az egyik egyenes tetszőleges pontjához a másik egyenesen egy és csak egy korrespondeáló pont létezik. Az értelmezés szerint $BN^- \mid AM^+$ egyenesek nem metsző egyenesek, így a tétel érvényes.

E tétel tehát a maradék axiómarendszer alapján levezetett tételek speciális eseteként említhető.

Ehhez hasonlóan kezelhető a 8. § is. A 8. §-ban Bolyai a következő tételt rögzíti: Ha $BN^+ \parallel CP^+$, továbbá $BCP \sphericalangle \equiv CBN \sphericalangle$ és az NBCP tartományban levő AM merőlegesen felezi a $|BC|$ távolságot, akkor $BN^+ \parallel AM^+$. E paragrafus felépíthető a következőképpen is:

A nem metsző egyenesek középvonalának értelmezése alapján a párhuzamos egyenesek középvonalát a következőképp értelmezhetjük:

Értelmezés: A BN^+ és CP^+ párhuzamosok középvonalán azt az AM egyenest értjük, amelynek pontjai a BN és CP egyenesektől egyenlő távolságra vannak (a. tulajdonság).

Megjegyzés: Az értelmezésnél figyelembe vettük azt a tételt, amely szerint a párhuzamosság független a félegyenesek kezdőpontjától.

A párhuzamosság értelmezéséből és az előbbi értelmezésből következik, hogy mindazok a tulajdonságok és tételek, amelyek a nem metsző egyenesek középvonalára igazok, párhuzamos egyenesek középvonalára is érvényesek. Így érvényesek a következő tulajdonságok és tételek:

b) tulajdonság: Ha $BN^+ \parallel CP^-$ és BN egy H pontjából merőlegest bocsátunk AM egyenesre és ennek T a talppontja, akkor a HT egyenesnek az a Q pontja, amelyre $|HT| \equiv |TQ|$ és az elrendezés (HTQ), a CP párhuzamos egyenesen fekszik.

c) tulajdonság: Ha a $B^- \parallel CP^+$ félegyeneseken az egymáshoz korrespondeáló B_i és C_i pontokat keressük meg, akkor ezen $(B_i C_i)$ szakaszok középpontjainak mértani helye az AM középvonal.

A maradék axiómarendszer alapján bizonyított tételek, hogy: „Az egymást nem metsző a és b egyenespárhoz legfeljebb egy középvonal tartozik és az a), b) és c) tulajdonsággal rendelkezik. Ha egy, a b) vagy c) tulajdonsággal rendelkező egyenes létezik, akkor az a) és c), illetve a) és b) tulajdonságokkal is rendelkezik." — és „Az egymást nem metsző egyenespárnak van középvonala." (Uo. 103. és 107. tételek.) Ezek alapján kimondhatók a következő tételek:

8. 1. tétel: A BN és CP párhuzamosoknak egy és csak egy AM középvonala van. AM a BN és CP által meghatározott sávban van és nem metszi a BN és CP egyeneseket.

8. 2. tétel: Az AM középvonal az a), b), c) tulajdonságokkal rendelkezik, sőt ha ezek egyikével rendelkezik egy egyenes, akkor a másik kettővel is.

8. 3. tétel: Ha a középvonal tetszőleges két pontjában merőlegest állítok AM egyenesre, akkor a párhuzamosokból lemetszett szakaszok egybevágók.

8. 4. tétel: A B ponthoz az egyetlen korrespondeáló C pontot úgy kapjuk, hogy a B pontot tükrözzük az AM középvonalra. Ennek következménye a:

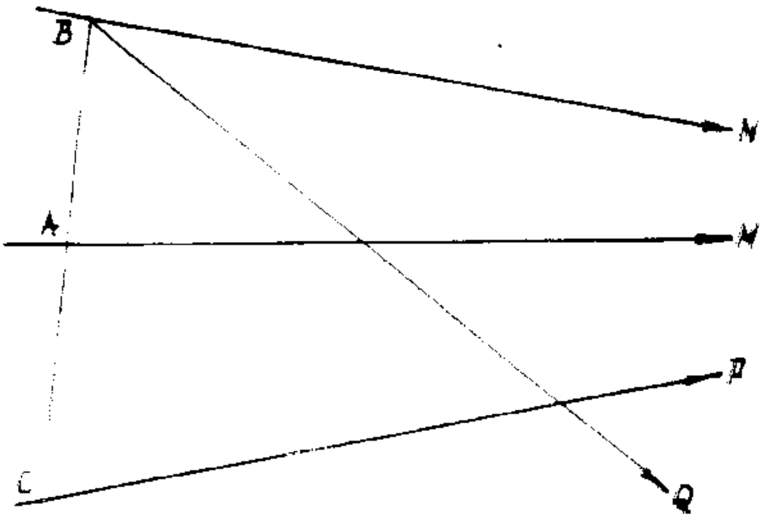
8. 5. tétel: Ha a középvonalra egy pontjában merőlegest állítunk, akkor ez a párhuzamosokat egybevágó szögekben metszi.

— „Ha A és B az egymást nem metsző a, b egyesnespárnak egy korrespondeáló pontpárja, akkor az |AB| szakasz merőleges felezője az egyenespárnak középvonala." — tételnek a megfelelője (uo. 104. tétel):

8. 6. tétel: Ha a $BN^- \parallel CP^+$ párhuzamosoknak a B és C egy korrespondeáló pontpárja, akkor a (BC) merőleges felezője a párhuzamosoknak középvonala.

8. 7. tétel: Ha $BN^+ \parallel CP^+$, akkor az AM középvonalra is $AM^+ \parallel BN^+$ és $AM^+ \parallel CP^+$ (feltéve, hogy M a (BAC) ugyanazon oldalán van, mint N és P).

Bizonyítás: A 8. 1. tétel értelmében AM nem metszi a BN és CP egyeneseket. A PCBN síktartományban levő bármely BQ metszi CP-t.

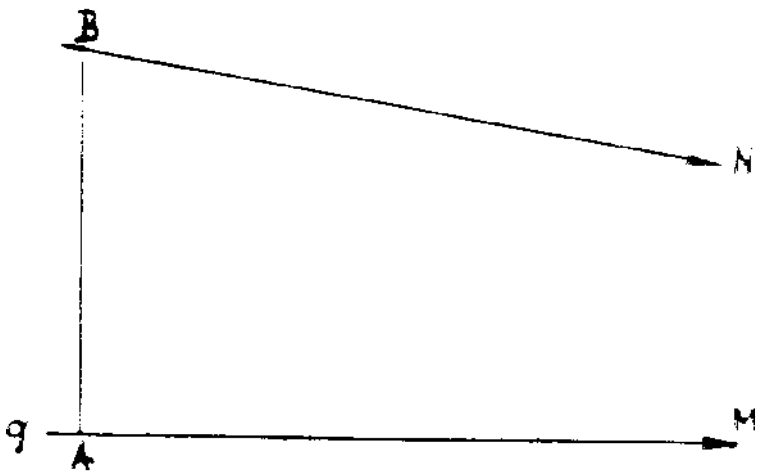


2. ábra

A maradék axiómarendszer alapján bizonyított tétel — „Ha egy egyenes nem megy át egy háromszög valamelyik csúcspontján, a háromszög egy oldalát egy belső pontban metszi, akkor annak pontosan még egy oldalát metszi." — (uo. 16. tétel) — alapján következik, hogy akkor BQ^- és AM^--nek is van közös pontja. Így $BN^+ \parallel AM^+$. A 7. § értelmében pedig $AM^+ \parallel CP^+$.

Ha e tétel után bevezetjük a „paralellaszög" fogalmát, azt a 9. § bizonyítása során előnyösen felhasználhatjuk. Ezen paragrafusban Bolyai a következő tételt mondja ki: „Ha $BN^+ \parallel AM$ és $MAP \perp MAB$, továbbá az a lapszög, melyet (NB) D az (NB) A-val képez az MABN síknak azon az oldalán, ahol az (MA) P van, kisebb R-nél, akkor az (MA) P és (NB) D félsíkok metszik egymást." E tétel bizonyítása után utal arra, hogy „. . . igazolható, hogy az (MA) P és (NB) D félsíkok általában metszik egymást, ha az MABN síktartománnyal bezárt szögük összege < 2 R."

A teljesség igényét szem előtt tartva, e paragrafus felépíthető a következőképpen:



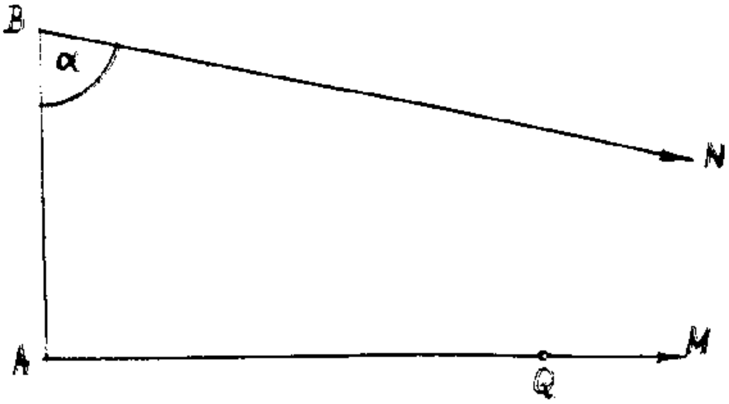
3. ábra

Értelmezés: Azt a szöget, amelyet B-ből egy g egyenesre bocsátott merőleges BA félsugár és a B-ből kiinduló g-vel párhuzamos BN félegyenes határoznak meg, a (BA) szakaszhoz tartozó „paralellaszög"-nek nevezzük.

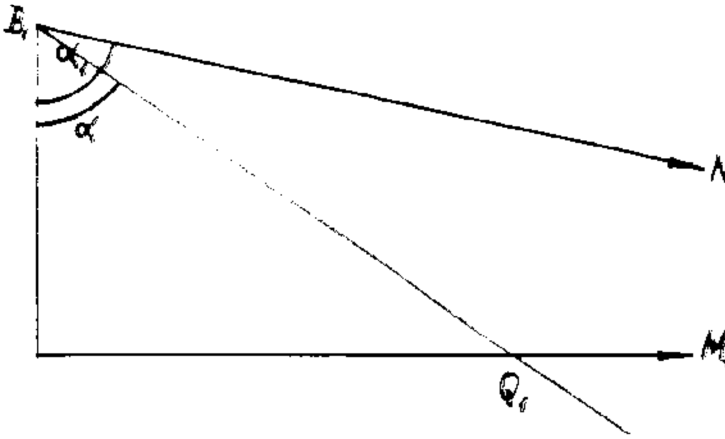
9. 1. tétel: Egybevágó szakaszokhoz egybevágó „paralellaszög"-ek tartoznak.

(E tétel abszolút geometriai tétel. A tétel csak annyit mond, hogy ha a szakaszok egybevágók, akkor a hozzájuk tartozó paralellaszögek is egybevágók, de nem mondja azt, hogy ha a szakaszok különbözők, akkor a hozzájuk tartozó paralellaszögek is különbözők.)

Bizonyítás. Legyen $|BA|$ és $|B_1 A_1|$ a két adott szakasz, amelyre $|BA| \equiv |B_1 A_1|$ és a hozzájuk tartozó paralellaszögek α és α_1. Tegyük fel, hogy $\alpha \neq \alpha_1$, hanem pl. $\alpha < \alpha_1$. Mérjük fel α-t $|B_1 A_1|$-hez B_1 csúcsponttal. A felmért szögszár metszi az $A_1 M_1$-



4. ábra



5. ábra

félegyenest Q_1 pontban a párhuzamosság értelmezése alapján. Mérjük fel $|A_1 Q_1|$ szakaszt AM-re A-ból, így kapjuk Q-t. Ezek szerint AQB háromszög egybevágó $A_1 Q_1 B_1$ háromszöggel. Így $ABQ \sphericalangle \equiv \alpha$. Ez ellentmondás, tehát $\alpha = \alpha_1$.

9. 2. tétel: Ha $AM^+ \parallel BN^+$ és β sík a BN-hez illeszkedik, akkor az AM-hez egy és csakis egy olyan α sík illeszthető, amely a β-t nem metszi.

A bizonyítást a következő lépésekben végezzük el. Először kimutatjuk speciális esetre, hogy az (AM; BN) sík azon oldalán, ahol a belső szögek összege $< 2\,R$, a két sík metszi egymást. Majd kimutatjuk speciális esetre, hogy ha a belső szögek összege $2\,R$, akkor α és β nem metszi egymást. Harmadik lépésben kimutatjuk, hogy legfeljebb egy olyan sík létezik a BN-re illeszkedő β-hoz, amely nem metszi. És utolsó lépésben kimutatjuk, hogy tetszőleges β-hoz mindig van egy α, amely nem metszi.

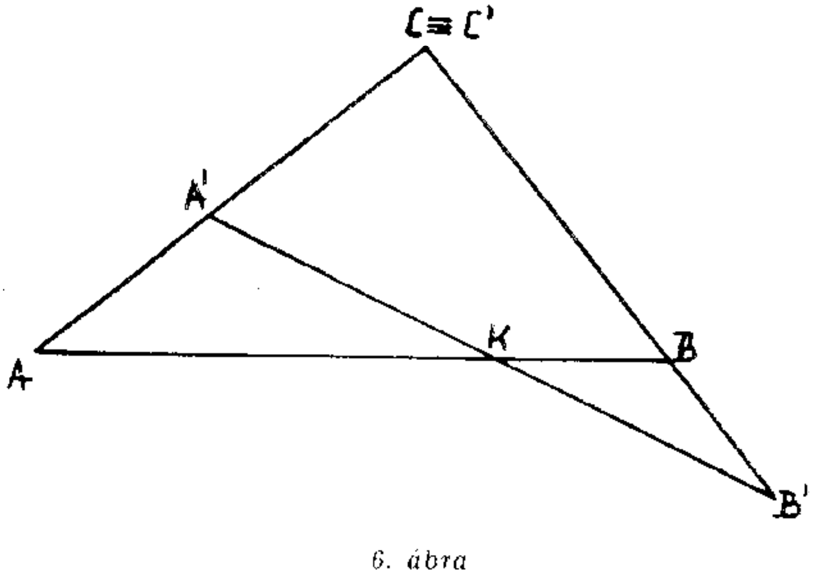
1. Ha $BN^+ \parallel AM^-$ és $MAP \perp MAB$, továbbá az a lap-szög, amelyet $|NB|\,D$ az $|NB|\,A$-val képez az MABN síknak azon az oldalán, ahol az $|MA|\,P$ van, kisebb R-nél, akkor az $|MA|\,P$ és $|NB|\,D$ félsíkok metszik egymást.

A bizonyításhoz még a következő segédtételt mutatjuk ki:

Segédtétel: Ha az ABC és A' B' C' háromszögekben $|AB| \equiv |A'B'|$; $ACB\sphericalangle \equiv A'C'B'\sphericalangle$, $|AC| > |A'C'|$ és $|BC| < |B'C'|$ akkor $ABC\sphericalangle > A'B'C'\sphericalangle$.

Ui. mérjük fel $|C'A'|$-t C-ből a $|CA|$ oldalra és $|C'B'|$-t a C-től a $|CB|$ oldalra. Az elrendezés (CA' A) és (CBB'). Így a háromszögtétel szerint: „Legyen ABC három különböző, nem egy egyenesre illeszkedő pont. Továbbá D egy pont, amelyre (ADC) és egy E pont, amelyre (ABE) fennáll. Akkor a DE és CB egyeneseknek van közös F pontjuk, amelyre (BFC) és (DFE) áll fenn." — az (A' KB') és AKB) elrendezések érvényesek. Ekkor viszont a KBB' háromszögnek ABC külsőszöge, ez tehát nagyobb KB' B szögnél. Ezzel a segédtételt igazoltuk.

Ezután térjünk át a bizonyításra.

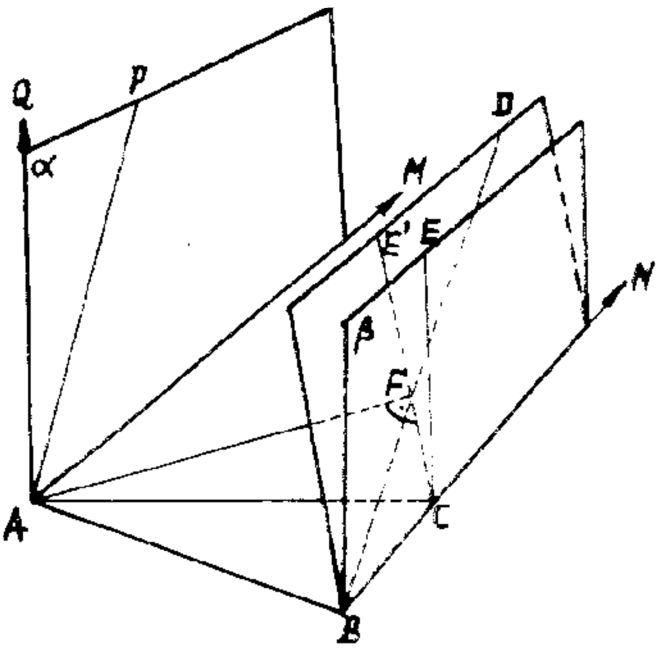


6. ábra

Bizonyítás: Legyen |AB| $\perp$ AM, akkor AB $\perp$ AP-re is a feltevés szerint, legyen továbbá AC $\perp$ BN és CE' $\perp$ BN, akkor ACE' szög < R a feltétel szerint, és legyen AF $\perp$ CE'. AF az ACE' síkban van. Legyen az |AB| F és |MA| P síkok metszésvonala AP. Az előző segédtétel szerint az ABF és ABC háromszögekben ABF $\sphericalangle$ < ABC $\sphericalangle$. Az |AB|-hez tartozó párhuzamossági szög ABC $\sphericalangle$. Így a 9. 1. tétel szerint AP és BF metszik egymást, tehát az |MA| P és |NB| D síkok metszik egymást.

2. Ha a BN-re illesztett β sík merőleges az AM, BN síkjára és az AM-re illesztett α sík is, akkor α és β nem metszi egymást. A bizonyítás során felhasználjuk a következő segédtételt: Három sík esetében, ha két metszésvonalnak van egy közös pontja, akkor a közös pontra illeszkedik a harmadik metszésvonal is, vagyis a három síknak legfeljebb egy közös pontja van.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy α és β metszi egymást QP-ben. A 7. § szerint ez a metszésvonal párhuzamos AM-mel is. Legyen QA $\perp$ AM, és AC $\perp$ BN. Ekkor a β síkban lévő bármely C-re illeszkedő egyenes $\perp$ AC-re. Így a QAC síknak és β-nak CE metszésvonala is merőleges AC-re. Az α, β és QAC síkok két metszésvonalának AQ és QP-nek van egy közös pontja. A segédtétel értelmében a harmadik CE metszésvonal is illeszkedik akkor a közös Q pontra, vagyis AQ és CE metszi egymást. Ez azonban ellentmond azon tételnek, hogy: „Ha két a és b egyenes ugyanazon harmadik g egyenesre merőleges, akkor az a és b-nek nem lehet metszéspontja.", tehát a feltevés helytelen, vagyis α és β nem metszi egymást.



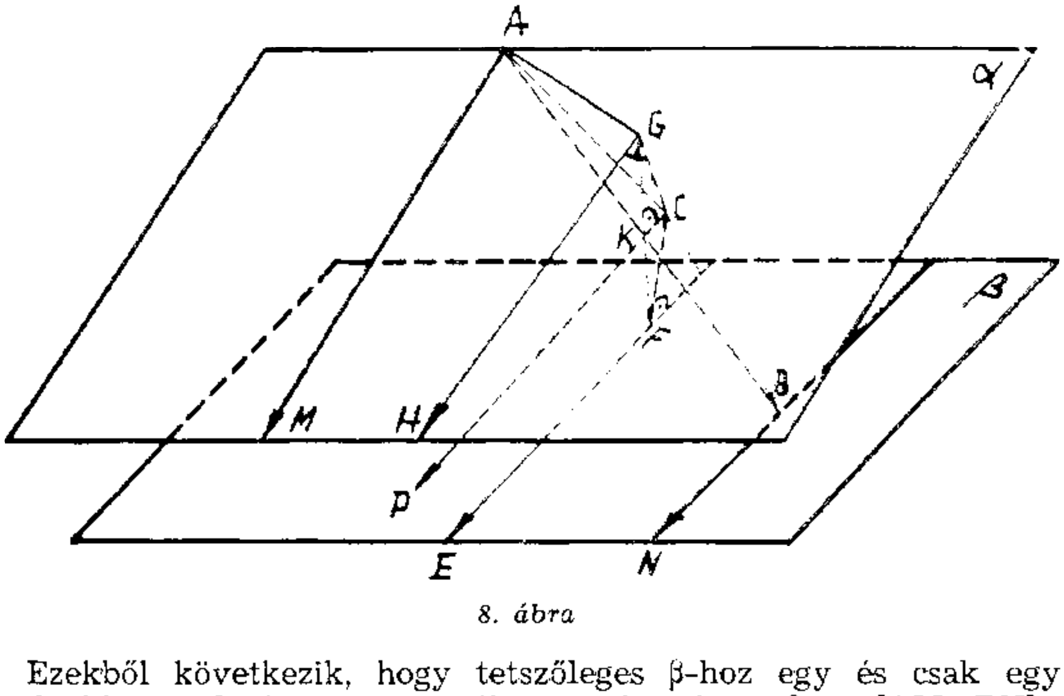
7. *ábra*

3. Illeszkedjen BN-re a tetszőleges β sík. Ekkor a BN^+-hez párhuzamos AM^+-re legfeljebb egy olyan α sík illeszthető, amely nem metszi β-t. (Erre a tételre Kárteszi az Appendixhez írt megjegyzésekben a következő bizonyítást adja:)

Bizonyítás: AM merőleges vetülete β-n legyen A' M'. (AM; A' M') sáv síkja merőleges β-ra, így az előző tétel szerint csak az az α sík nem metszi β-t, amely merőleges az MAA' síkra.

4. A BN-re illesztett tetszőleges β síkhoz AM-re mindig illeszthető egy α sík úgy, hogy α és β nem metszik egymást.

Bizonyítás: Illeszkedjen BN-re a tetszőleges β sík. Legyen AM^+ és BN^+ párhuzamosok középvonala CP és ennek merőleges vetülete β-n FE. A tranzitivitás alapján $FE^+ \parallel CP^+ \parallel AM^+$. Tükrözzük FE-t CP-re, akkor a 8-as tételek értelmében GH és FE-nek CP középvonala. Így a tranzitivitás alapján $GH^+ \parallel AM^+$. Tekintsük a GH és AM párhuzamosok síkját. Erről kimutatjuk, hogy merőleges [GH, FE] síkjára. Legyen $|CF| \perp FE$, $|CG| \perp GH$, $|AB| \perp$ CP-re K-ban. K felezőpontja $|FG|$-nek és $|AB|$-nek is a szerkesztés alapján. Így AGK és BFK háromszögek egybevágók, tehát $|AG| \equiv |FB|$, FCG egyenlőszárú háromszögből $GC \equiv FC$ és BCA egyenlőszárú háromszögből $|AC| \equiv |BC|$. De akkor az $AGC_\triangle \equiv BCF_\triangle$ háromszöggel. Mivel CFB $\sphericalangle = R$, akkor AGC $\sphericalangle$ is $= R$. CG tehát merőleges az α síkra, mert merőleges GH, GA két egyenesére. Így az α és β síkok merőlegesek [FE, GH] síkjára, az előző pont szerint tehát nem metszik egymást. Vagyis a BN-re illeszkedő tetszőleges β-hoz van olyan AM-re illeszkedő α sík, hogy α és β nem metszik egymást.



8. ábra

Ezekből következik, hogy tetszőleges β-hoz egy és csak egy α illeszkedik, amelyek nem metszik egymást, és α, β az [AM, BN] sík azon oldalán metszik egymást, ahol a lapszögek összege $< 2R$.

UNTERSUCHUNG EINIGER PARAGRAPHEN DER APPENDIX AUF GRUND DES ÜBERRESTEN-AXIOMSYSTEMS

Dr. BÉLA PELLE

In diesem Artikel bearbeiten wir einige Paragraphen der Appendix von Bolyai auf Grund des Überresten-Axiomsystems. Wir beweisen durch die 4., 5., 8. und 9. §-en der Appendix, dass aus diesen verschiedene Thesen sich ergeben, und dass wir die einzelnen Thesen auch anderswie ableiten können, wenn wir den Überresten-Axiomsystem als Grund annehmen. Wir zeigen, dass wir anstatt des 4. § schon eine allgemeinere Thesis beweisen können, dann behandeln wir einige Folgen daraus.

Über den 5. § beweisen wir, dass es ein spezieller Fall der — auf Grund des Überresten-Axiomsystems — abgeleiteten Thesen sei. Dasselbe können wir auch über den 8. § sagen. Der 9. § wird aber von uns in einem anderen Aufbau und im allgemeineren behandelt.

IRODALOM

[1] Bolyai János: Appendix. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952.
[2] D. Hilbert: Grundlagen der Geometrie. Fünfte Auflage, Leipzig und Berlin, 1922.
[3] Varga Ottó: A geometria alapjai. Felsőoktatási Jegyzetellátó Vállalat, Budapest, 1958.
[4] N. I. Lobacsevszkij: Geometriai vizsgálatok a párhuzamosok elméletének köréből. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1951.
[5] Hajós György: Bevezetés a geometriába. Tankönyvkiadó, Budapest, 1960.