AZ OKTATÁSHOZ SZÜKSÉGES FÜGGVÉNYTANI FOGALMAK BEÉPÍTÉSE A KÍSÉRLETI FIZIKA MECHANIKA TANANYAGÁBA

MÁRKUS JENŐ

A fizika a természetben előforduló jelenségek meghatározott csoportjának megismerésével foglalkozik. A természeti jelenségekről tapasztalat útján szerzünk tudomást. A jelenségeket kísérlettel többször megismételve, méréssel állapítjuk meg a természeti törvényeket. A fizikai jelenségek törvényeit, illetve a fizikai fogalmakat legcélszerűbben matematikai egyenletekkel, illetve függvényekkel fejezhetjük ki. Ezáltal válik a matmatika a fizikai megismerés fontos segédtudományává.

Felsőoktatásunkban a fizika tanítását a kezdeti időszakban igen megnehezíti az a jelenlegi helyzet, hogy hallgatóinknak nincs olyan bő matematikai ismerete, mely elegendő volna a fizikának megfelelő szinten való tanításához. A középiskolában szerzett ismereteik erre elégtelenek, felsőoktatási tanulmányaik folyamán csak később jutnak el erre a szintre. Ez tette szükségessé annak a kérdésnek felvetését, hogy a középiskolai matematika oktatás anyagát át kell formálni. A jelenlegi helyzet azonban a felsőoktatásban még több évig fennálló probléma: hogyan és milyen mértékben bővítsük a fizika tanításához szükséges matematikai ismereteket. Ebben a dolgozatban csak a függvénytani ismeretek bővítésével szeretnék foglalkozni.

A felvetett kérdés tartalmilag kettős:

I. Milyen mértékben?
II. Hogyan?

Az első kérdésre röviden lehet válaszolni: csak olyan mértékben, amennyire az a fizika tanításához szükséges.

Ez a megállapítás egyaránt vonatkozik a fogalmi ismeretekre és a számolási eljárásokra. Nem lehet azonban csak a számolási eljárások ismeretével megelégedni, mert ezáltal a fizikai fogalmak kialakítása is hiányokat szenved.

Hogyan bővítsük ki megfelelő mértékben a matematikai hiányokat? Figyelembe kell vennünk elsősorban azt, hogy az általunk nyújtandó ezen ismeretekkel a hallgatók másik szaktárgyuk keretében is foglalkozni fognak nem sokkal későbbi időpontban. Fogalmak, jelölések és tételigazolások tekintetében lehetőleg alkalmazkodnunk kell a szaktárgy kívánalmaihoz. Útmutatónak ezért a megfelelő szakkönyvet (tankönyvet) kell tekintenünk. Ettől csak annyiban és olyan mértékben térjünk el, amennyiben az a fizika hagyományos és megszokott kívánalmai szerint szükséges. A hogyan kérdéshez tartozik az is, miképen kapcsoljuk hozzá a matematikai ismeretek bővítését a fizika oktatásához. E tekintetben két szokás alakult ki:

1. A fizika oktatás megkezdése előtt nyújtjuk mindazokat a matematikai ismereteket, melyek a fizika tanításához szükségesek.

2. Szervesen beleillesztjük a fizika oktatásba, s az egyes matematikai kérdésekkel akkor foglalkozunk csak, mikor a fizika oktatás folyamán annak szükségessége jelentkezik.

Az első módszer mellett érvként lehet felhozni, hogy a fizika oktatást nem kell ismételten megszakítani a matematikai ismeretek bővítése céljából. Hátránya, hogy a rövid idő alatt kapott sok új fogalom és ismeret a kezdeti fokon nehezen sajátítható el, s nem látszik annak szükségessége sem. Ezért rendszerint ismételnünk kell a matematikai fogalmakat akkor is, mikor a fizika oktatásában használni akarjuk.

A másik módszer ugyan ismételten is megszakítja a szakoktatás menetét, mégis több előnye mutatkozik:

a) A fogalmak megismerése huzamosabb idő alatt megy végbe és részekre bomlik. Így meginduláskor némikép csökkenti az ellentétet a közép- és felsőfokú oktatás között is.

b) Olyan fizika anyagba kell beépíteni, mely alapjaiban ismert a középiskolai fizikai tanulmányokból.

c) Látszik a matematikai fogalmak megismerésének szükségessége a fizikai fogalmak elmélyítése céljából.

d) Látszik, hogy a fizika fejlődése hogyan teszi szükségessé a matematikai fogalmak fejlesztését.

e) A fizikai fogalmak elősegítik a matematikai fogalmak megértését.

Felvethetjük azt a kérdést is: a matematikai fogalmak bővítésénél példaként felhasználhatjuk-e a meglevő fizikai ismereteket? Pl. a függvény fogalmánál a már középiskolából ismert fizikai ismereteket. Itt legyen szabad hivatkoznom R. Pohl német fizikusra, aki a felsőoktatás számára írt könyvét szerkezetileg úgy alakította ki, hogy feltételezett fizikai előismereteket. Az ismeretek ilyen irányú felhasználása azért is előnyösnek látszik, mert a fizika területén világít rá mindjárt a matematikai fogalmakra.

Kétségtelen, hogy az említett függvénytani fogalmak alábbi tárgyalásmódja ellen a matematikai logika szempontjából lehet kifogásokat felhozni. Számunkra azonban a matematikai tételek felhasználása a lényeges, s éppen ezért a tételek igazolásába nem merülhetünk bele olyan mélységig, mint azt a szaktárgy teszi. Legyen szabad hívatkozni: „Joos—Kaluza: Höhere Mathematik” c. könyvére, melyet a szerzők azon célzattal állítottak össze, — mint az a könyv előszavából megállapítható, — hogy fizikusok, kémikusok és mérnökök számára a matematikai fogalmakat a gyakorlat követelményeinek megfelelően ismertessék.

Nézzük most már részleteiben, melyek azok a matematikai fogalmak, melyek a mechanika kísérleti úton való oktatásához szükségesek, és a fizika anyag mely részeinél válik szükségessé ezen fogalmak ismertetése?

Ezek a fogalmak:

1. A függvény folytonossága a mozgás pályavonalával kapcsolatban.
2. A differenciálhányados fogalma a sebesség és gyorsulás fogalmához.
3. Hatványfüggvény differenciálhányadosa az egyenletesen változó mozgás mozgástani öszefüggéseinél.
4. Szorzatfüggvény differenciálhányadosa a felületi sebesség tételéhez.
5. Függvény függvényének differenciálhányadosa.
6. sin x és cos x trigonometrikus függvények differenciálhányadosa. A két utóbbi pont a rezgő mozgás sebesség és gyorsulás összefüggésének meghatározásához.
7. A függvény szélsőértékének fogalma és annak meghatározása pontmozgástani és ütközési feladatokhoz.
8. A határozatlan integrál fogalma és számítása a mozgások erőtani tárgyalásához.
9. A határozott integrál fogalma és számítása a munkavégzés meghatározásához.

Az alábbiakban inkább a függvénytan sorrendjében, mint a fizika tárgyalásának sorrendjében foglalkozunk a felmerülő kérdésekkel. Ezért az egyes matematikai részek ismertetése mindig oda iktatandó be, ahol az a fizikában szükségessé válik. Ez a beépítés a matematikai fogalmak kialakításában nem okoz zavart.

A függvény és a függvény folytonosság fogalmának meghatározása a pályagörbével kapcsolatban látszik a legcélszerűbbnek. A mozgás pályavonalát, mint az idő függvényét adjuk meg:

$$s = s(t) \qquad \text{vagy} \quad x = x(t);\ y = y(t);\ z = z(t)$$

alakban.

A függvény fogalmának meghatározása középiskolából ismeretes: „Minden olyan esetben, amikor egy számösszesség számaihoz hozzárendelünk bizonyos számértéket (egyet, vagy többet), függvény kapcsolatot létesítünk." (Matematika gimn. IV. o. számára XIII. kiadás, 38. old.). A mozgástanban a „t" számhalmaz számaihoz rendeljük hozzá a „s" halmaz számait. A hozzárendelés az: $s = s(t)$ egyenlettel, a pályavonal egyenletével történik. Célszerűnek látszik megemlíteni a többváltozós függvények fogalmát is. Ilyen a fizikában gyakran fordul elő. Példaként fizikai egyenlet-összefüggéseket hozhatunk fel.

Pl. az ohm-törvény, ahol az áramerősség (I) a feszültség (U) és az ellenállás (R) függvénye.

A folytonosság fogalma a középiskolából csak a pályavonal alapján szemléletesen ismeretes. Ezt a meghatározást már szükségesebb pontosan definiálni, már csak azért is, mivel közelebb kerülünk a differenciálhányados fogalmához. A függvény folytonosság fogalmát a főiskolai tankönyv határérték fogalommal ádja meg: „Az f (x) függvényt folytonosnak nevezzük az x_0 pontban, ha az x_0 pontbeli határértéke egyenlő az x_0 ponthoz tartozó helyettesítési értékkel, azaz:

$$\text{ha: } x_n \to x_0 \text{ akkor: } f(x_n) \to f(x_0)\text{''}$$

(Szerényi T.: Analizis I. 64. old.)

A folytonosság fogalmához szükséges a függvény határértékének fogalma. Erre az idézett tankönyv 61. oldalán ezt a meghatározást találjuk: „Az f (x) függvénynek az x_0 helyen van határértéke és az A, ha valahányszor $x_n \to x_0$ $(x_n \neq x_0)$ mindannyiszor $f(x_n) \to A$.
és így jelöljük:

$$\lim_{x_n \to x_0} f(x_n) = A.$$

A függvény határértékének fogalmát tehát visszavezethetjük a sorozat határértékének fogalmára.

Sorozatról és sorokról a gimn. III. osztályában már volt szó. A határértéket néhány egyszerűbb példával mutathatjuk meg.

Eltérés van fizika és matematika között abban, hogy a fizika a mennyiségek változásával foglalkozik, míg a matematika mennyiségekkel. Ezért célszerűbb a fenti meghatározásokat mindjárt ilyen alapon megfogalmazni. A változások jelölésére a fizika a „Δ" jelölést használja (Δt; Δs; Δv). Így nem számsorozatok (független változó és függvény értékek sorozatának) határértékével kell definiálnunk, hanem intervallumok sorozatának határértékével. Ennek alapján a függvényfolytonosságát így adhatjuk meg: Legyen az f(x) függvény helyettesítési értéke egy x_0 helyen $f(x_0)$. Képezzük az x_0 környezetében a változónak $x + \Delta x_n$ intervallum sorozatát, (ahol Δx_n lehet pozitív, negatív, vagy változó előjelű.) Az f(x) függvényt az x_0 helyen akkor mondjuk folytonosnak, ha minden olyan Δx_n sorozatra, melyre:

$$[\Delta x_n] \to 0 \text{ az } [f(x_0 + \Delta x_n) - (f x_0)] \to 0$$

s ezt a következőkép jelöljük:

$$\lim_{\Delta x_n \to 0} f(x_0 + \Delta x_n) - f(x_0) \to 0$$

A differenciálhányados fogalmának bevezetése a változó mozgásokkal kapcsolatban válik szükségessé. A változó mozgás fogalma szerint a tömegpont egyenlő idők alatt nem egyenlő utakat tesz meg. Nem lehet megtartani a sebességnek az egyenletes mozgásnál kapott fogalmát: sebességen az út és a megtételéhez szükséges idő hányadosát értjük. Szükséges a pillanatnyi sebesség fogalma $\left(v=\frac{ds}{dt}\right)$. Ugyanígy szükséges a pillanatnyi gyorsulás fogalma $\left(a=\frac{dv}{dt}\right)$ az egyenlőtlenül változó mozgásnál. Ezért a változó mozgásokkal kapcsolatban be kell vezetni a differenciálhányados fogalmát. A már idézett főiskolai tankönyv 120. és 121. oldalán erre a következőt találjuk: „A f(x) függvény az x_0 pontban differenciálható és differenciálhányadosa „A", ha valahányszor: $h_n \to 0$ mindannyiszor:

$$\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n} \to A.$$

...a differenciálhányados geometriai jelentése: az x_0 pontbeli differenciálhányados az x_0 pontbeli érintő iránytangense." Ehhez a fogalomhoz a tankönyv úgy jut el, hogy a $h_n \to 0$ számsorozat segítségével az $f(x_0)$ és $f(x_0+h_n)$ végpontú függvény intervallumokat képezi, s vizsgálja az intervallumok végpontjain átmenő szelőket. Megállapítja a szelők iránytangenseiből alkotott sorozat határértékét, ha a $h_n \to 0$. Itt csupán a jelöléseknek a fizika szempontjából célszerűbb és megszokottabb átírása szükséges. A folytonosságnál használt jelölést megtartva: az x_0-hoz adjuk meg a Δx intervallumok sorozatát, melyre a: $\Delta x \to 0$ fennáll. Az x_0 és $x_0+\Delta x$ intervallumok végpontjain át húzott szelők sorozatának iránytangensére a következőket kapjuk:

$$\operatorname{tg}\alpha_n=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

A szelők sorozatának határértéke a görbe x_0 pontjához tartozó érintő, az iránytangensek sorozatának határértéke az érintő iránytangense.

$$\lim_{\Delta x\to 0} \operatorname{tg}\alpha_n=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\operatorname{tg}\alpha=\frac{d\,f(x)}{dx}=f'(x)$$

Formailag így ugyanazon értelmezéshez jutunk, mint a tankönyv: geometriailag az x_0 ponthoz tartozó differenciálhányados nem más, mint a görbe x_0 ponthoz tartozó érintő iránytényezője. Matematikailag ezt az iránytangenst úgy határozzuk meg, hogy kiválasztunk egy olyan tetszőleges szelő sorozatot, mely a kérdéses érintőhöz konvergál. A szelősorozat iránytangenséből alkotott sorozat határértéke, azaz az érintő iránytangense a differenciálhányados. Annak taglalásával nem érdemes foglalkoznunk, hogy ha a szelősorozat az érintőhöz konvergál, a szelősorozat iránytangenséből alkotott sorozatnak az érintő iránytangenséhez kell konvergálnia. Ennek igazolását hagyjuk a matematikai tanulmányokra.

Az $y=f(x)$ jelölést használva, célszerűnek látszik a „differencia hányados” fogalmának és elnevezésének bevezetése. Az x_0 ponthoz megadott Δx intervallumok segítségével az $y = f(x_0)$ és $y+\Delta y = f(x_0 + \Delta x)$ függvényértékek sorozatát kapjuk, melyből $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ függvény intervallumok képezhetők. A Δx intervallumot a független változó növekményének, a Δy intervallumot függvény növekménynek nevezzük. Így

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

a differenciahányados, a függvény növekmény és a független változó növekményének a hányadosa.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$$

a differenciálhányados határértéke a differenciálhányados. Hasonló jelöléseket találunk az idézett főiskolai tankönyv 124. oldalán is a differenciálhányados fizikai értelmével kapcsolatban.

Az állandó függvény, hatvány függvény, összeg és különbség függvény differenciálási műveletének levezetése nem szükségképeni követelmény, s legfeljebb azért célszerű, hogy néhány egyszerűbb feladaton a differenciálást, mint műveletet, feladat-megoldó órán gyakorolni tudjuk. A differenciálási műveletek matematikai levezetésével a dolgozat keretében nem foglalkozom. Ezek megtalálhatók bármely ilyen tárgyú szakkönyvben, a már idézett főiskolai tankönyvben is. Mindezeket feladat megoldó órák keretében is beiktathatjuk. Elméleti órán még is szükségesnek látszik az: $s=\frac{a}{2}t^2$ összefüggésből a: $v=a\,.\,t$ összefüggés megállapítása. Ugyanígy az: $s= v_0t + \frac{a}{2}t^2$ -ből $v = v_0 + at$ meghatározása. Minthogy ezen összefüggések a fizika keretébe tartoznak, foglalkozunk lealább az elsővel.

$$s=\frac{a}{2}t^2$$

$$s+\Delta s=\frac{a}{2}(t+\Delta t)^2$$

$$\Delta s=\frac{a}{2}\cdot[(t+\Delta t)^2-t^2]$$

$$\Delta s=\frac{a}{2}[(2t\cdot\Delta t)+\Delta^2 t]$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{a}{2}(2t+\Delta t)$$

$$v = \frac{ds}{dt} = a \cdot t$$

Az $a = \frac{dv}{dt}$ pillanatnyi gyorsulásnál, mivel $v = \frac{ds}{dt}$; $a = \frac{d^2s}{dt^2}$ beszélhetünk röviden a második és a magasabb rendű differenciálhányadosokról is.

A fenti differenciálási szabályok megállapítása átmenetet ad a függvény függvényének differenciálhányadosához. Erre ugyan csak a rezgőmozgással kapcsolatos: $s = A \sin \frac{2\pi}{T} t$ trigonometrikus függvénynél van szükség. Gyakorlás szempontjából mégis itt célszerűbb vele foglalkozni. Kiindulásul az: $y = (ax^2 + bx)^2$ alakú függvények szolgálhatnak. Ezek differenciálhányadosát a hatványozás elvégzése után is meg tudjuk határozni. Nem határozható meg így az $y = \sqrt{ax^2 + bx}$ alakú függvények differenciálhányadosa.
Mint matematikából ismeretes, a függvény függvényének differenciálhányadosára az alábbi öszefüggés érvényes:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Az eredmény összehasonlítása az: $y = (ax^2 + bx)^2$ függvénynél el is végezhető. A rezgőmozgással kapcsolatban szükséges az

$$y = \sin x \qquad \text{és } y = \cos x$$

függvények differenciálhányadosának meghatározása. Ezt, — az idézett tankönyv 143. és 58—59. oldalán találhatjuk meg. E szerint ha:

$$y = \sin x \qquad \frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$y = \cos x \qquad \frac{dy}{dx} = -\sin x$$

A rugalmas ütközéssel, vagy már előbb a tömegpont mozgásával kapcsolatban előfordulhatnak olyan feladatok, melyeknél szélsőérték számításra van szükség. Ha ilyen feladatokat is meg akarunk oldani, matematikai részére is a feladatmegoldó órán térhetünk ki. Legcélszerűbben a fizikai feladathoz kapcsolva. Pl. „A” pontból m tömegpontú golyó úgy jusson el egyenletes mozgással „B” pontba, hogy közben rugalmasan ütközzön a H—H falon. Milyen AOB úton kell a golyónak mozognia, hogy ez az útvonal a lehető legkisebb legyen? (1. ábra)

Legyen: $y = AO + OB$ a megtett út.

Legyenek: A_1 és B_1 a vetületi pontok, OC az O pont beesési merőlegese.

$$A_1B_1 = d \qquad AA_1 = m_1$$

$BB_1 = m_2$ a feladat szerint állandó távolságok.

$$AO = \sqrt{x^2+m_1^2} \qquad \text{és} \qquad OB = \sqrt{(d-x)^2+m_2^2}$$

összefüggésből:

$$y = \sqrt{x^2+m_1^2} + \sqrt{(d-x)^2+m_2^2}$$

függvény értékei között a legkisebbet keressük. A feladatot, — ha matematikailag nem is teljesen, — számunkra kielégítően így oldhatjuk meg.
Az $y = ax^2 + bx + c$ függvény képe, ha $a>0$ olyan parabola, melynél a szárak felfelé haladnak (2. ábra). A függvény értékek felvesznek egy legkisebb értéket. Ez a legkisebb függvény érték a függvény minimuma. Az $y = ax^2 + bx + c$ függvény képe, ha $a<0$ olyan parabola, melynél a szárak lefelé haladnak. (3. ábra). Így a függvény értékek felvesznek egy legnagyobb értéket. Ez a függvény maximuma. Maximum és minimum a függvény szélső értékei. (A fogalmak a gimnázium anyagából ismertek.) A szélsőértékű helyeken meghúzott görbeérintők az x tengellyel párhuzamosak, irányszögük: 0^0 illetve 180^0, így:

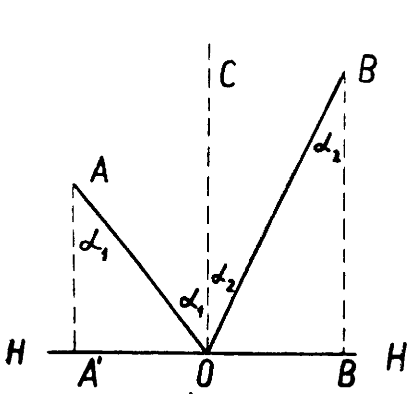
$$tg0^0 = tg\,180^2 = 0$$

Mivel az érintő iránytangense az illető pontban a differenciálhányados, a szélsőértékű helyekre fennáll, hogy ott

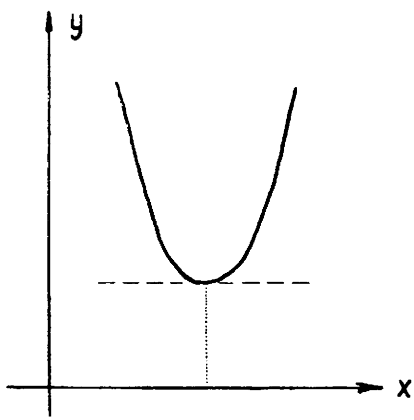
$$\frac{dy}{dx} = 0$$

Visszatérve az eredeti feladatra:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+m^2}} - \frac{2(d-x)}{2\sqrt{(d-x)^2+m_2^2}} = 0$$



1. ábra



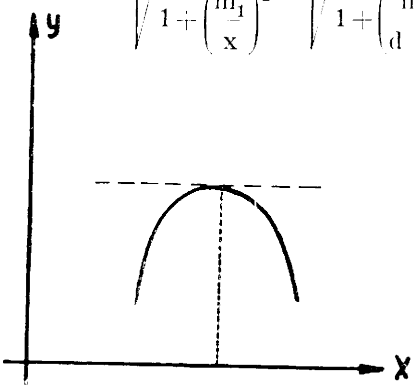
2. ábra

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+{}_1^2}} = \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+m_2^2}}$$

A számlálókkal a gyökök alá beosztva:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{m_1}{x}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{m_2}{d-x}\right)^2}}$$

az 1. ábra szerint:



3. *ábra*

$$\frac{m_1}{x} = \operatorname{ctg}\alpha_1 \qquad \frac{m_2}{d-x} = \operatorname{ctg}\alpha_2$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha_1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha_2}}$$

Amiből 0 és $\frac{\pi}{2}$ közötti α_1 és α_2 szögekre adódik:

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

Vagyis a minimális út feltétele, hogy a golyó ugyanolyan szöggel verődjön vissza, mint amilyennel beesett. Ezzel a rugalmas golyó rugalmas falba való ütközésének törvényét igazoltuk.

A centrális mozgásoknál a felületi sebesség tételének igazolásához szükséges a szorzat függvény differenciálhányadosának szabálya. A felületi sebesség tétele — mint ismeretes — azt mondja ki, hogy a vezérsugár által az időegység alatt súrolt terület állandó. A tétel igazolását főiskolai tankönyvünk (Párkányi L.: Mechanika I. 132—134. old.) szerint kissé nehézkesnek találom. Áttekinthetőbb igazolást ad erre. A. Recknagel: Physik, Mechanik kötete. Ez utóbbi gondolatmenetét követem.

A centrális mozgás feltétele, hogy a gyorsulás vektor a vezérsugárra essen. Az iránytényezőkre tehát fennáll:

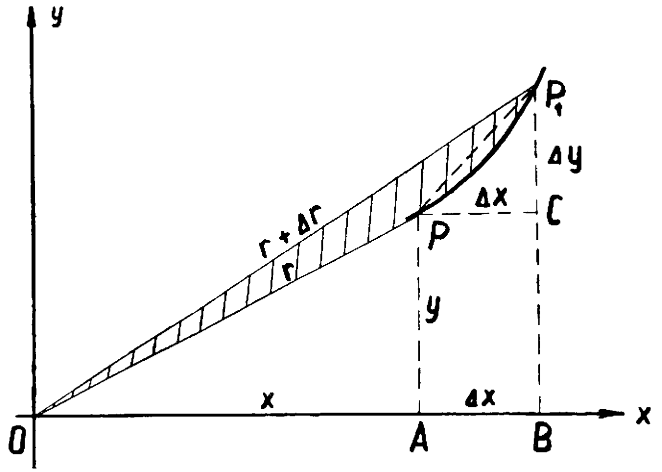
$$\operatorname{tg}\alpha_a = \operatorname{tg}\alpha_r \qquad \text{ahol:} \qquad \operatorname{tg}\alpha_a = \frac{a_y}{a_x} \qquad \text{és} \qquad \operatorname{tg}\alpha_r = \frac{y}{x}$$

A centrális mozgást végző tömegpont „Δt” idő alatt elmozdul a $P(x, y)$ pontból a $P_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ pontba. (4. ábra). A vezérsugár ezen idő alatt a besatírozott $\Delta F = OPP_1$ háromszög területét súrolja. Ha „Δt” megfelelően kicsi, a „PP_1” ív helyett az összekötő húr vehető. Ezen feltétellel:

$$OPP_1\Delta = OBP_1\Delta - OAP\Delta - PCP_1\Delta - ABCP\square$$

vagyis:

$$\Delta F = \frac{1}{2}(x+\Delta x)\cdot(y+\Delta y) - \frac{1}{2}\cdot x\cdot y - \frac{1}{2}\cdot\Delta x\cdot\Delta y - \frac{1}{2}y\cdot\Delta x$$



4. ábra

Beszorzás és összevonás után:

$$\Delta F = \frac{1}{2}(x \cdot \Delta y - y \cdot \Delta x) \qquad / : \Delta t$$

$$\frac{\Delta F}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left(x \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} - y \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t}\right)$$

Határértékként kapjuk a felületi sebességre:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \left(x \cdot \frac{dy}{dt} - y \cdot \frac{dx}{dt}\right) = \frac{1}{2} \cdot (x \cdot v_y - y \cdot v_x)$$

A felületi sebesség tétele szerint ennek állandónak kell lenni. Ezt úgy igazoljuk, hogy akkor $\frac{d^2F}{dt^2} = 0$ kell legyen. (Állandó függvény differenciálhányadosa zéró). A felületi sebességfüggvény jobb oldalán álló zárójelben olyan különbség függvény szerepel, ahol mindkét tag két tényezőből áll, s a tényezők mindegyike „t" függvénye. Ezért szükséges kitérni a szorzatfüggvény differenciálhányadosára. Erre nézve megállapítható:

ha $$y = g(x) \,.\, h(x)$$

akkor $$\frac{dy}{dx} = \frac{dg(x)}{dx} \cdot h(x) + g(x) \cdot \frac{dh(x)}{dx}$$

Visszatérve a felületi sebesség tételére:

$$\frac{d^2F}{dt^2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{dx}{dt}v_y+x\cdot\frac{dv_y}{dt}-\frac{dy}{dt}\cdot v_x-y\cdot\frac{dv_x}{dt}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(v_x\cdot v_y+x\cdot a_y-v_y\cdot v_x-y\cdot a_x)$$

$$\frac{d^2F}{dt^2}=\frac{1}{2}(x\cdot a_y-y\cdot a_x)=0$$

mert a centrális mozgás feltétele szerint:

$$\operatorname{tg}\alpha_a=\operatorname{tg}\alpha_r$$

$$\frac{a_y}{a_x}=\frac{y}{x}$$

$$x\cdot a_y-y\cdot a_x=0$$

A mozgások dinamikai tárgyalásához szükséges a határozatlan integrál fogalma. A mozgások dinamikai tárgyalásánál az erő nagyságából indulunk ki.

Ebből a $P = m . a$

öszefüggés alapján a gyorsulás meghatározható. A gyorsulásból kell a sebességfüggvényt, majd a sebességfüggvényből a pályaegyenletet meghatározni. Az eljárás tehát fordítottja annak, amit a mozgások kinematikai tárgyalásánál használtunk.

A határozatlan integrált legegyszerűbb úgy értelmezni, mint a differenciálás fordított műveletét: a differenciálhányadosból keressük az eredeti függvényt. Jelöljük:

$$\int f(x)dx=F(x) \qquad \text{ha:} \qquad \frac{dF(x)}{dx}=f(x)$$

A hatvány differenciálásánál megismert eljárást ezért fordítva használjuk: a hatványkitevőt eggyel növeljük, s az új kitevővel osztjuk a hatványmennyiséget.

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$$

Szükséges megemlíteni, hogy az eljárásnál olyan függvénysereget kapunk, melyek egymástól tetszőleges állandóban eltérhetnek (ezek az integrálandó függvény primitív függvényei), mivel az állandó differenciálhányadosa zéró. Mivel az állandó értéke tetszőlegesen választható meg, a mozgástani képletek meghatározásánál a kezdeti feltételek szabják meg az állandó értékét.

A határozatlan integrál értelmezéséből tehát kapjuk:

$$v=\int a\,dt$$

$$s=\int v\,dt$$

Példaként csak egyetlen mozgást nézzünk: a hajításokat. (5. ábra). A vízszintessel „α" szöget bezáró „c" kezdősebességgel hajítjuk el az „m" tömegű testet a koordinátarendszer kezdőpontjából.
A kezdeti feltételek:

a) a sebességre: $$c_x = c \cdot \cos\alpha$$ $$c_y = c \cdot \sin\alpha$$

b) az elmozdulásra: $$s_x = 0$$ $$s_y = 0$$

Az elhajított testre ható erő: $P = -mg$

így gyorsulása: $$a = \frac{P}{m} = -g$$

komponensekkel: $a_x = 0 \qquad a_y = -g$

A sebességkomponensek: $$v_x = \int o\,dt = k_1$$ $$v_y = -\int g\,dt = -gt + k_2$$

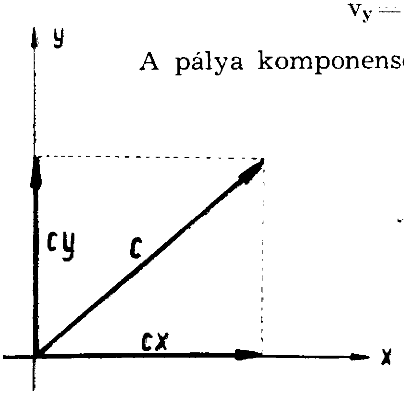
A sebesség kezdeti feltétele alapján,

ha $t = 0$ $\quad c_x = c \cdot \cos\alpha \quad$ tehát: $\quad k_1 = c \cdot \cos\alpha$

$c_y = c \cdot \sin\alpha \quad$ „ $\quad k_2 = c \cdot \sin\alpha$

Így a sebesség komponensei:

$$v_x = c \cdot \cos\alpha \qquad \text{. . . . . 1a}$$
$$v_y = -gt + c \cdot \sin\alpha \qquad \text{. . . . . 1b}$$



5. ábra

A pálya komponensekre:

$$s_x = \int c \cdot \cos\alpha\,dt = c \cdot \cos\alpha \cdot t + k_1$$
$$s_y = \int (c \cdot \sin\alpha - gt)dt = c \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{g}{2}t^2 + k_2$$

A pályavonal kezdeti feltételei alapján:

ha $t = 0$ $\quad s_x = 0 \quad$ tehát: $\quad k_1 = 0$

$s_y = 0 \quad$ „ $\quad k_2 = 0$

S így a pályavonal komponensei:

$$s_x = c \cdot \cos\alpha \cdot t \qquad \text{. . . . . 2a}$$

$$s_y = c \cdot \sin\alpha t - \frac{g}{2} t^2 \qquad \ldots\ldots 2b$$

Visszakapjuk a ferde hajításra ugyanazon összefüggéseket, melyeket a mozgás kinematikai tárgyalásánál megismertünk.

A ferde hajítás így megismert összefüggései speciális hajításokra is átvihetők:

a) Függőlegesen fel hajítás: $\alpha = 90°$ $(\cos\alpha = 0;\ \sin\alpha = 1)$

kezdeti feltételek: $c_x = 0$ $\quad c_y = 0$

$s_{x_0} = 0$ $\quad s_{y_0} = 0$

A mozgásegyenletek: $v_x = 0$ $\quad v_y = c - g \cdot t$

$s_x = 0$ $\quad s_y = c \cdot t - \frac{g}{2} t^2$

b) Függőlegesen le hajítás: $\alpha = 90°$ $(\cos\alpha = 0;\ \sin\alpha = -1)$

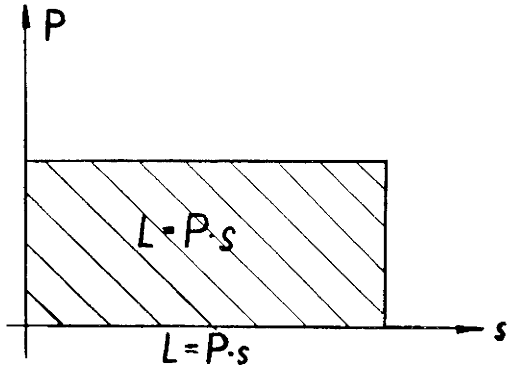
A kezdeti feltételek: $c_x = 0$ $\quad c_y = -c$ $\quad$ Mivel az „Y” tengelyirányításával ellentétes

$s_{x_0} = 0$ $\quad s_{y_0} = 0$

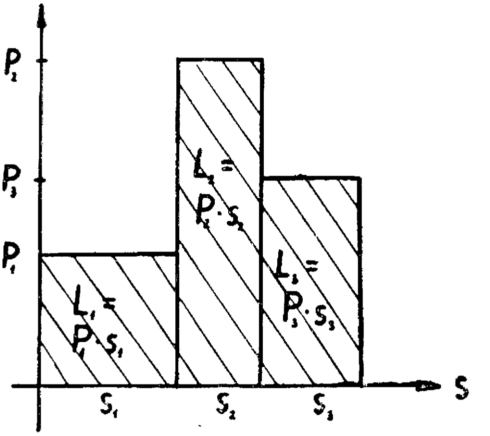
A mozgásegyenletek: $v_x = 0$ $\quad v_j = -c - g \cdot t$

$s_x = 0$ $\quad s_y = -ct - \frac{g}{2} t^2$

A tömegpont más mozgásának egyenletei hasonlóan határozhatók meg. A $P = P(s)$ alakú erő munkájának kiszámításánál válik szükségessé a határozott integrál fogalmának bevezetése.



6. ábra



7. ábra

Ilyen tankönyvi anyagunk szerint a rugalmas erő ($P = k.x$) ellenében végzett munka.

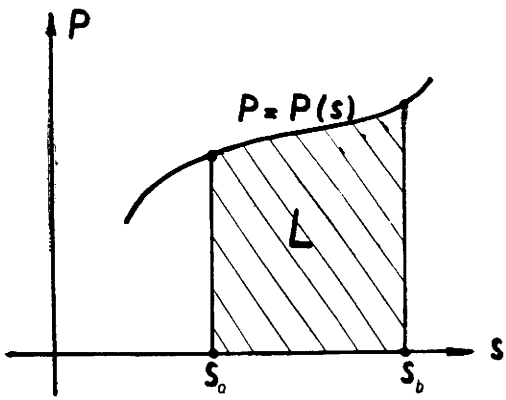
A határozott integrál fogalmával nem foglalkozhatunk olyan részletességgel, mint azt a matematika tankönyv teszi. (Szerényi T.: Analizis II.) Mégsem nélkülözhetjük az értelmezést teljes egészében. Meg kell elégednünk egy olyan értelmezéssel, mint amilyet pl. Obádovics J. Gy.: Matematika c. összefoglaló könyve ad. A határozott integrál fogalmának kialakítása a gimnáziumban régebben szintén ilyen módon történt.

A határozott integrál értelmezése után a $P = P(s)$ erő által végzett munkát már könnyen meghatározhatjuk. A munka kiszámítását tankönyvünk (Párkányi L.: Fizika I.) a 162. oldalon geometriailag értelmezi. Állandó és szakaszonként állandó erő által végzett munkát síkidomok területének összegeként kapjuk. (L.: 6. és 7. ábrák. Az ábrák a tankönyv 110. és 111/b. ábrái.) Ennek alapján a $P = P(s)$ erőnek az „$s = s_b - s_a$" útszakaszon végzett munkáját is úgy értelmezzük, mint azt a területet, amelyet az „$s = s_b - s_a$" útszakasz, a „$P(s_a)$" és „$P(s_b)$" ordináták, valamint a „$P(s)$" függvénygörbének az előbbi ordináták közé eső része határol. Ez a terület a már ismert módon határozott integrállal számítható ki:

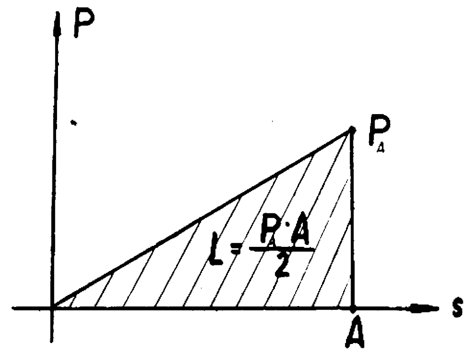
$$L = \int_{s_a}^{s_b} P \cdot ds$$

Felhasználása a rugalmas erő ellenében végzett munka: (8. ábra). Legyen a legnagyobb kitérés, a fél amplitudó: „A", amelyhez tartozó erő: „$P_A = k.A$" Az egyensúlyi helyzettől a legnagyobb kitérésig végzett munka:

$$L = \int_{0}^{A} k \cdot x \cdot dx = \left(\frac{k \cdot x^2}{2}\right)_0^A = \frac{k \cdot A^2}{2} = \frac{P_A \cdot A}{2}$$



8. ábra



9. ábra

ami a tankönyv szerint is (a 110 és 111/b. ábrákkal megegyezően) grafikusan a derékszögű háromszög területe (L.: 9. ábra).

A feladatként kitűzött célt ezzel elértük. Láttuk a matematikai fogalmak hogyan építhetők be a megfelelő helyeken a fizika anyag ismertetésébe. Ha ezek a fogalmak nem is olyan szabatosak, mint ahogyan azokat a matematikai kollokviumokban meg fogják ismerni, de azoknak nem mondanak ellent, és a fizikai fogalomalkatás számára kielégítőek. Kétségtelen, hogy ez a matematikai kiegészítés a fizika tanítására szánt időt csökkenti. De nélkülük a fizikai fogalmak kialakítása és megértése nem érhető el. Szükségesnek látszik ezért ezen új fogalmak beépítése az új megírandó tankönyvbe is. Ez a beépítés akkor sem nélkülözhető, ha a differenciál- és integrál-számításnak a gimnázium matematika anyagába való beiktatása megvalósul. Ekkor is számíthatunk olyan hallgatókra, akik nem ilyen tagozatú középiskolából jönnek hozzánk.

FELHASZNÁLT IRODALOM

Párkányi L.: Fizika I.
Szerényi T.: Analízis I.—II.
Obadovics J. Gy.: Matematika
A. Recknagel: Physik (Mechanik).
Gimnáziumok III.—IV. o. Matematika tankönyve.